DCC192

2025/1

UFMG

Desenvolvimento de Jogos Digitais

A5: Vetores

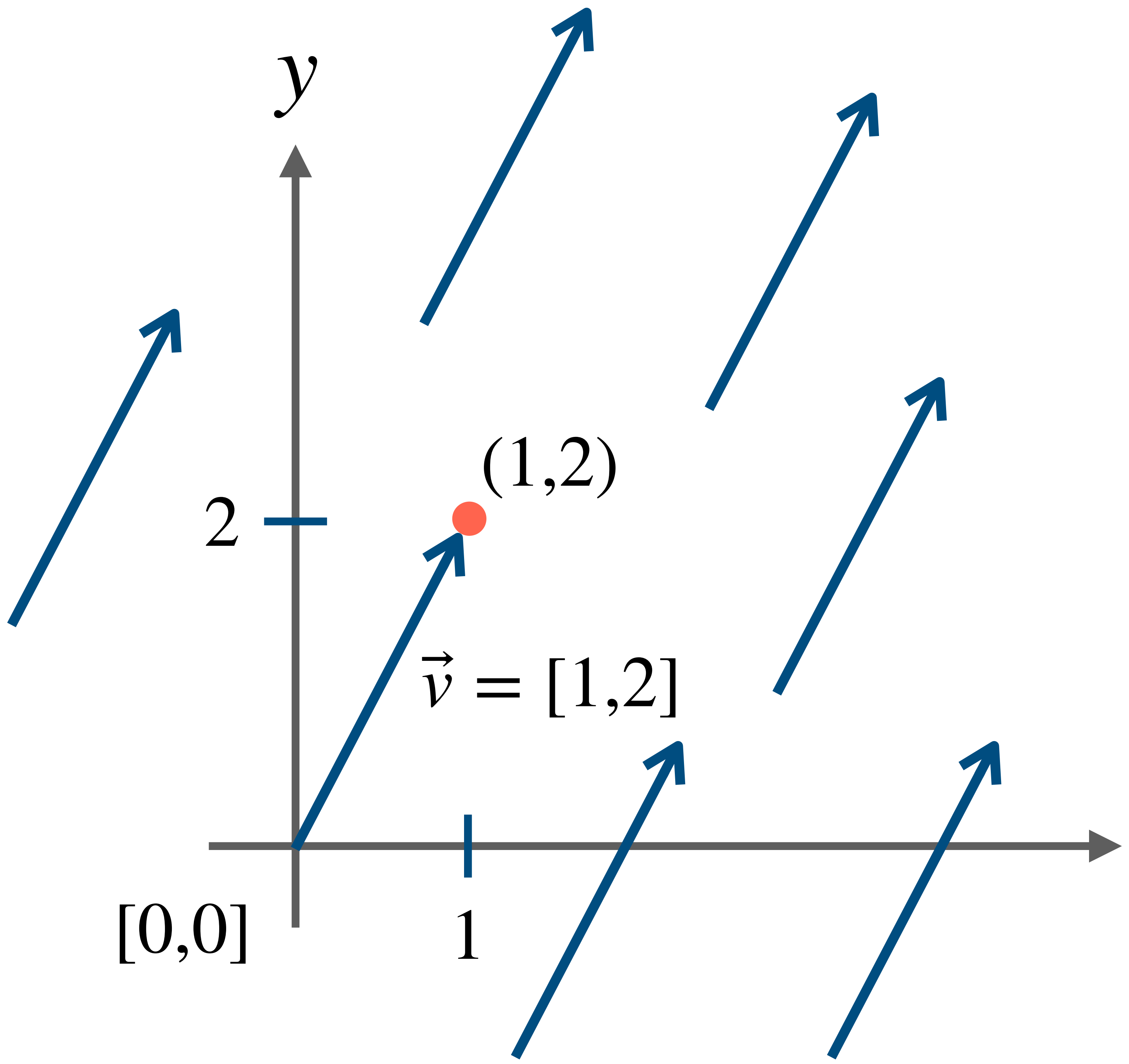
Prof. Lucas N. Ferreira

Plano de aula

- Vetores
  - Definição
  - Operações
  - Adição/Subtração
  - Multiplicação
  - Produto Escalar e Vetorial
  - Magnitude (Comprimento)
  - Normalização
  - Aplicações

Vetores

Um **vetor** representa uma magnitude, uma direção e um sentido em um espaço-dimensional.



- Por exemplo, um vetor $2D$ é definido como:

$$\vec{v} = [v_x, v_y] \in R^2$$

- **Vetores são independentes de posição**: dois vetores de mesma direção, sentido e comprimento são iguais!

- No entanto, é conveniente desenhar vetores com a **cauda** (ponto de partida) na origem $(0,0)$ de tal forma que a **cabeça** (ponto de destino) aponte para uma posição específica no espaço.

Vetores

```
class Vector2 {
    float x,
    float y
}

class Vector3 {
    float x,
    float y,
    float z
}
```

- Em jogos digitais, geralmente usamos vetores 2D e 3D, dependento dos gráficos de jogo.
- Vetores 4D também são usados em jogos 3D para combinar transformações (e.g., rotação e translação)
- Em código, vetores geralmente são representados por uma classe com um atributo float por dimensão.

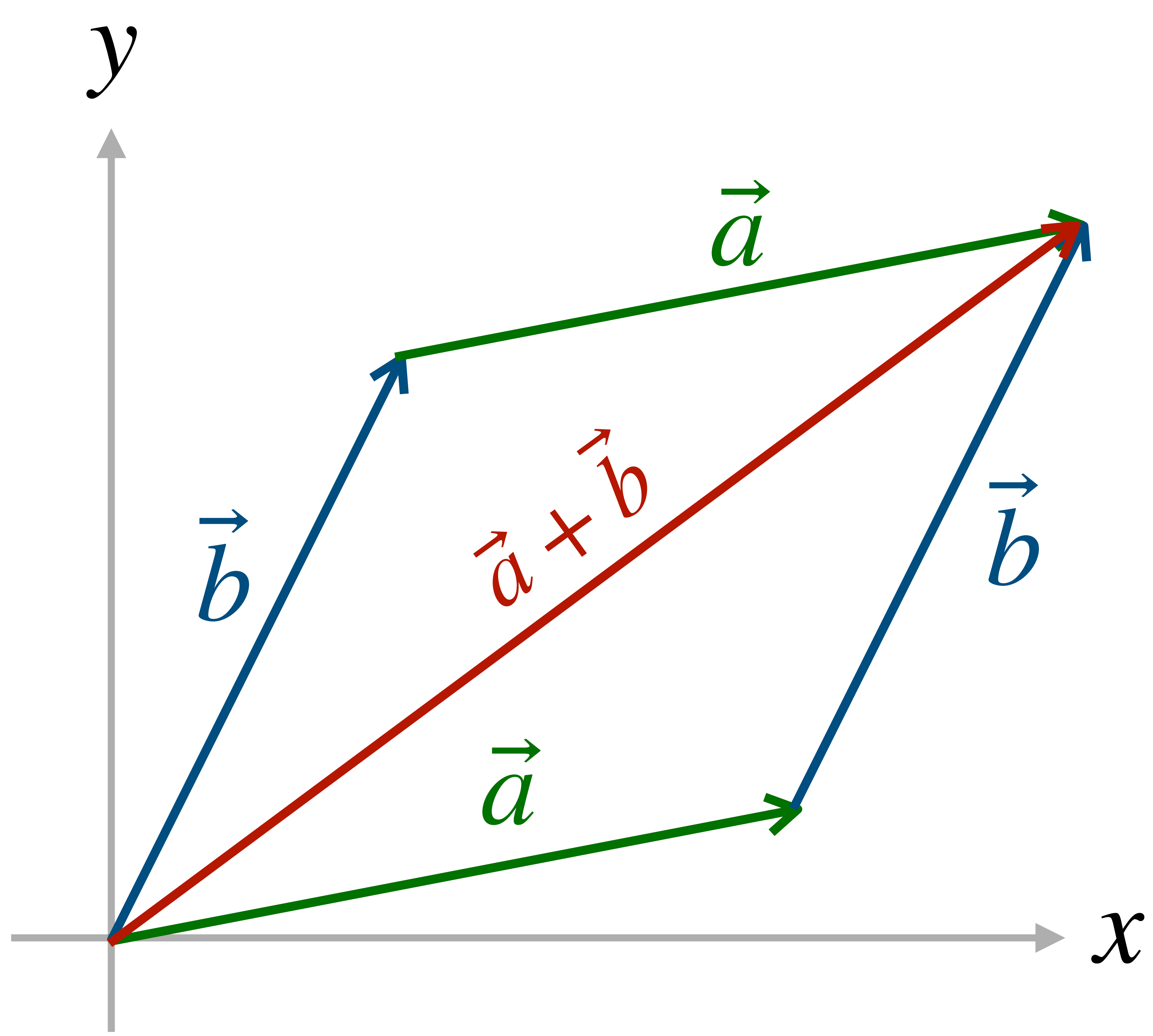
Operações Vetoriais

Diversas operações podem ser realizadas com vetores:

- Adição
- Subtração
- Multiplicação por Escalar
- Módulo (norma)
- Normalização
- Produto Escalar
- Produto Vetorial

Adição

A **adição** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definida pela soma dos componentes de $\vec{a}$ com seus componentes correspondentes em $\vec{b}$:



$$\vec{a}+\vec{b}=[a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z]$$

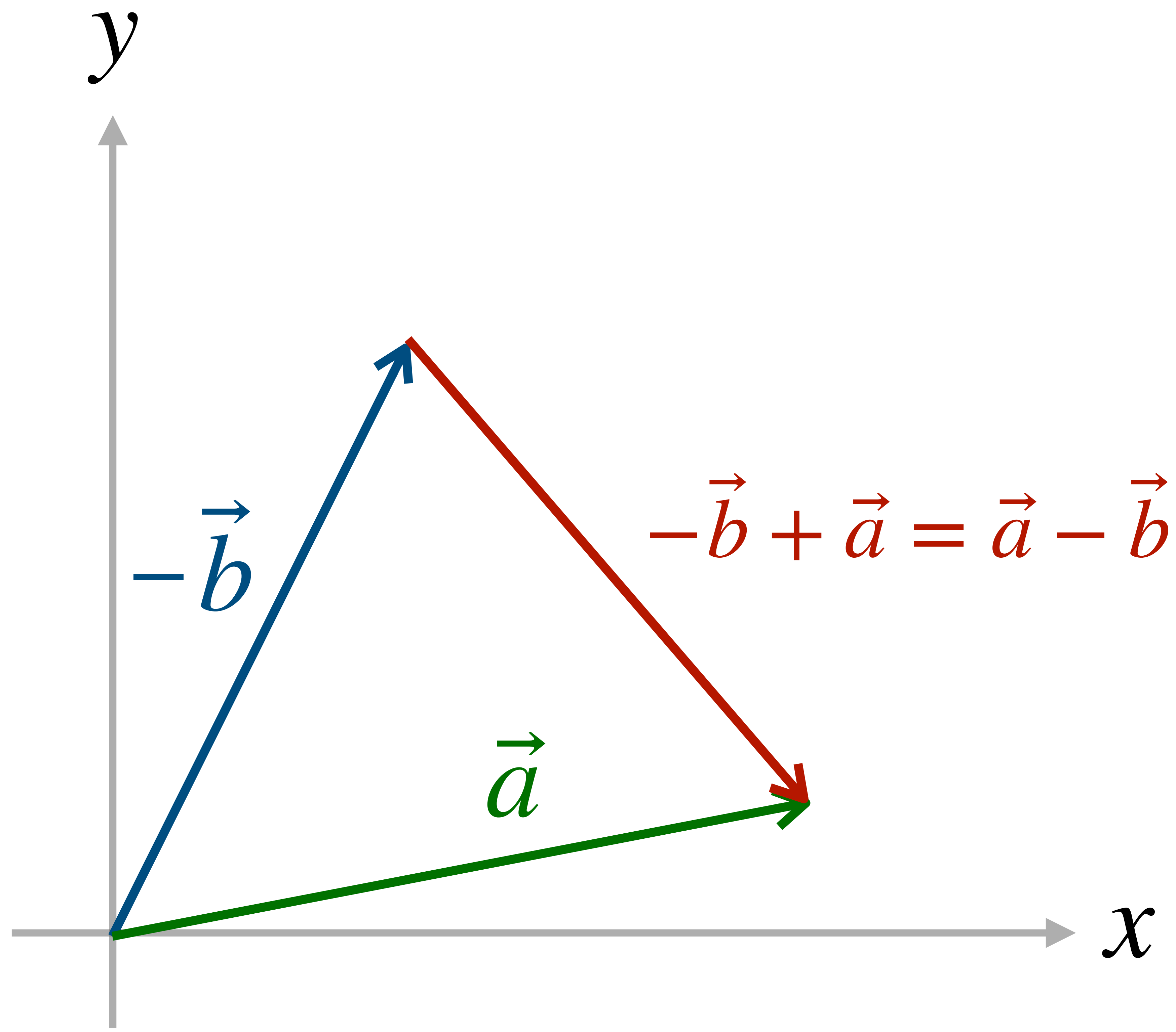
Geometricamente

- A adição pode ser realizada posicionando a cauda de $\vec{b}$ na cabeça de $\vec{a}$, e desenhando um vetor da cauda de $\vec{a}$ até a cabeça de $\vec{b}$.
- Note que se fizermos a soma na ordem inversa $\vec{b}+\vec{a}$, o vetor resultante é o mesmo.

  Regra do paralelogramo: $\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$

Subtração

A **subtração** de dois vetores $\vec{b}$ e $\vec{a}$ é definida pela subtração dos componente de $\vec{b}$ pelo seus componentes correspondentes em $\vec{a}$:



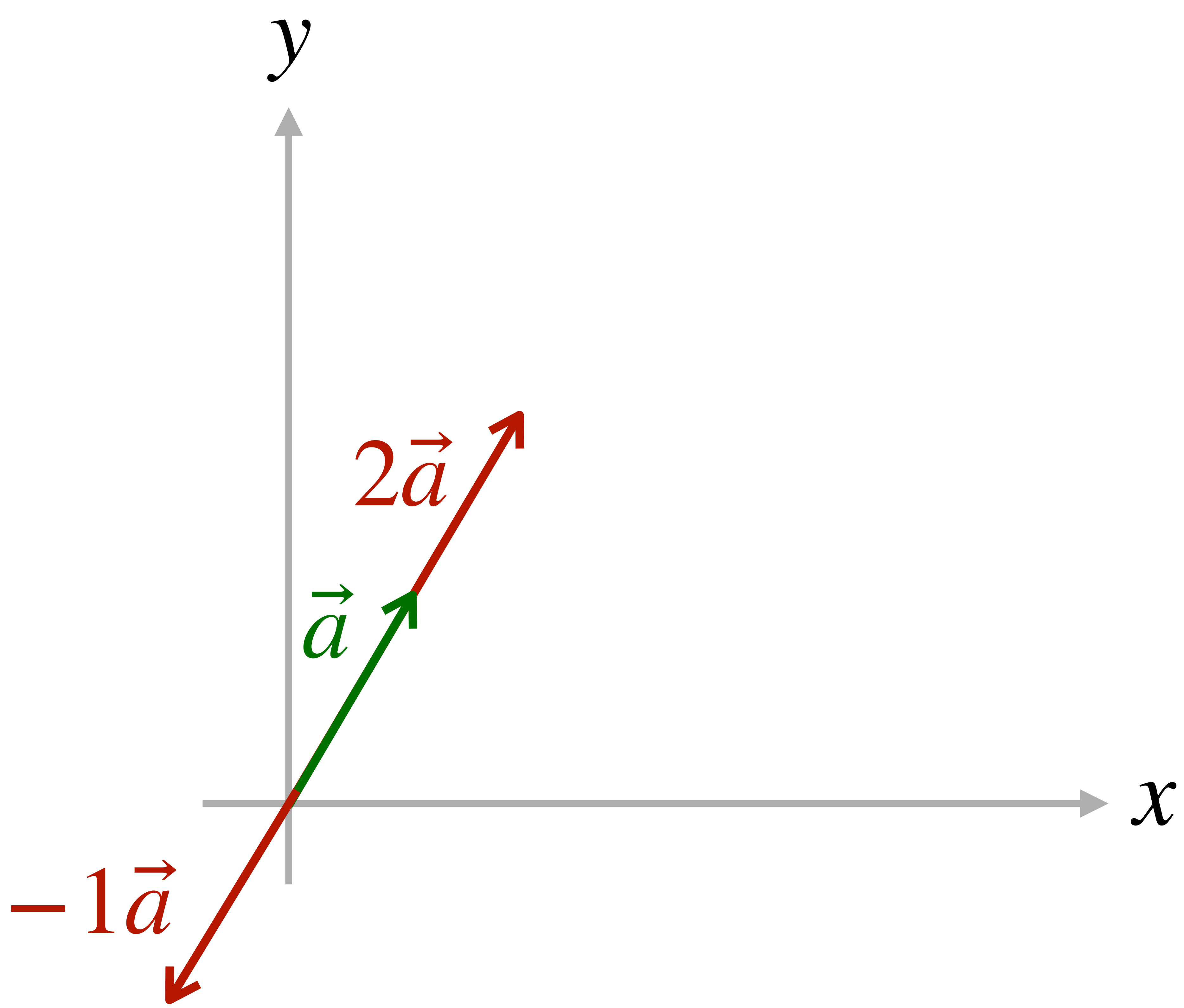
$$\vec{a} - \vec{b} = [a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z]$$

Geometricamente

- A subtração pode ser realizada da mesma forma como a adição, mas primeiro temos que inverter a direção de $\vec{b}$
- Note que se fizermos a subtração na ordem inversa $\vec{b} - \vec{a}$, o vetor resultante será diferente. Por isso, a subtração não é comuntativa.

Multiplicação por Escalar

A **multiplicação** de um vetor $\vec{a}$ por um escalar s é definida pela multiplicação de todos os compoenetes de $\vec{a}$ por s:



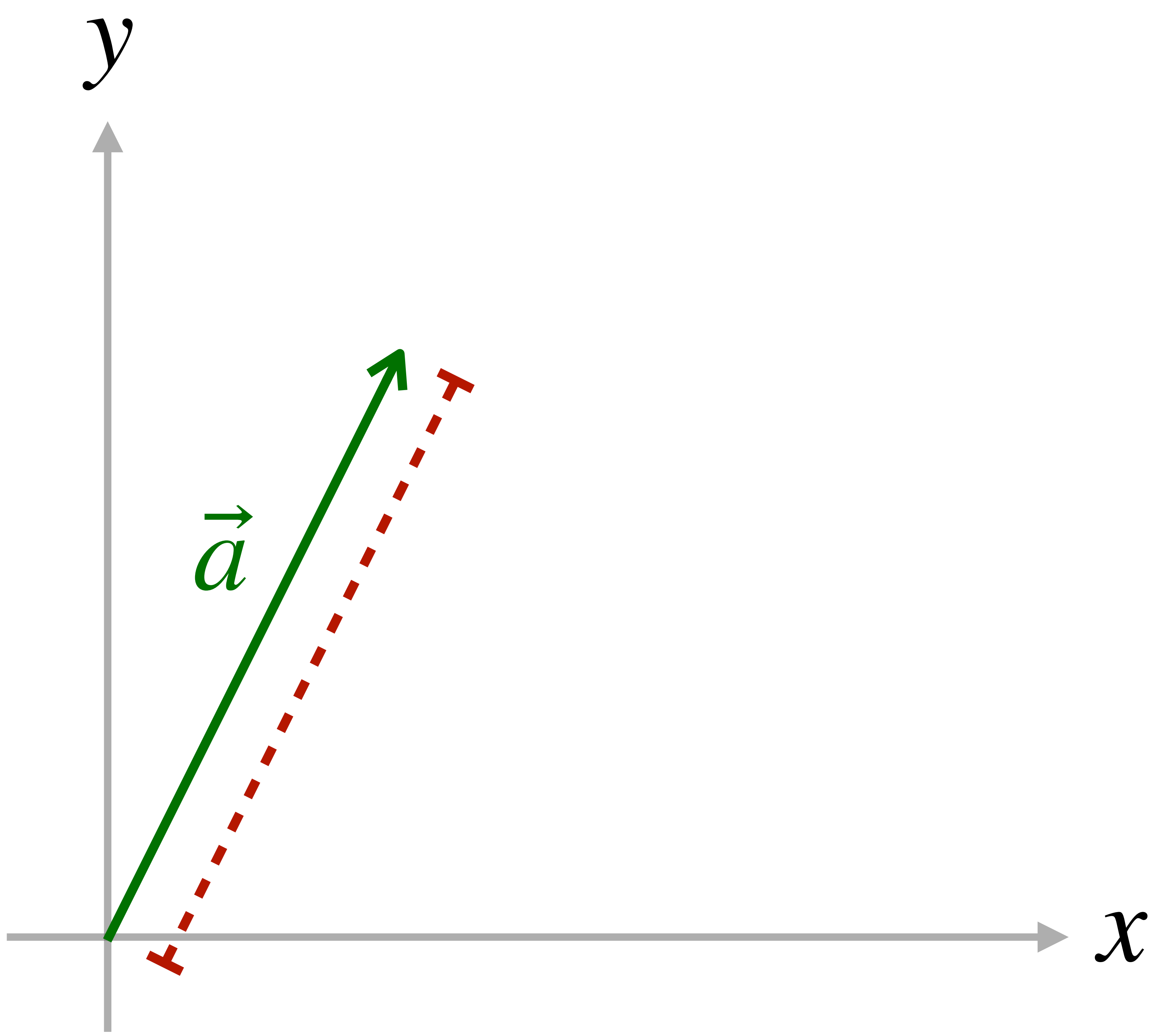
$$s \cdot \vec{a} = [s \cdot a_x, s \cdot a_y, s \cdot a_z]$$

Geometricamente

- A multiplicação por escalar altera apenas o comprimento de $\vec{a}$.
- Se s for negativo, a multiplicação irá inverter a direção de $\vec{a}$.

Magnitude (norma)

A **magnitude** $||\vec{a}||$ de um vetor vetores $\vec{a}$ é dada pela distância euclidiana entre a origem e o ponto ao qual $\vec{a}$ aponta:



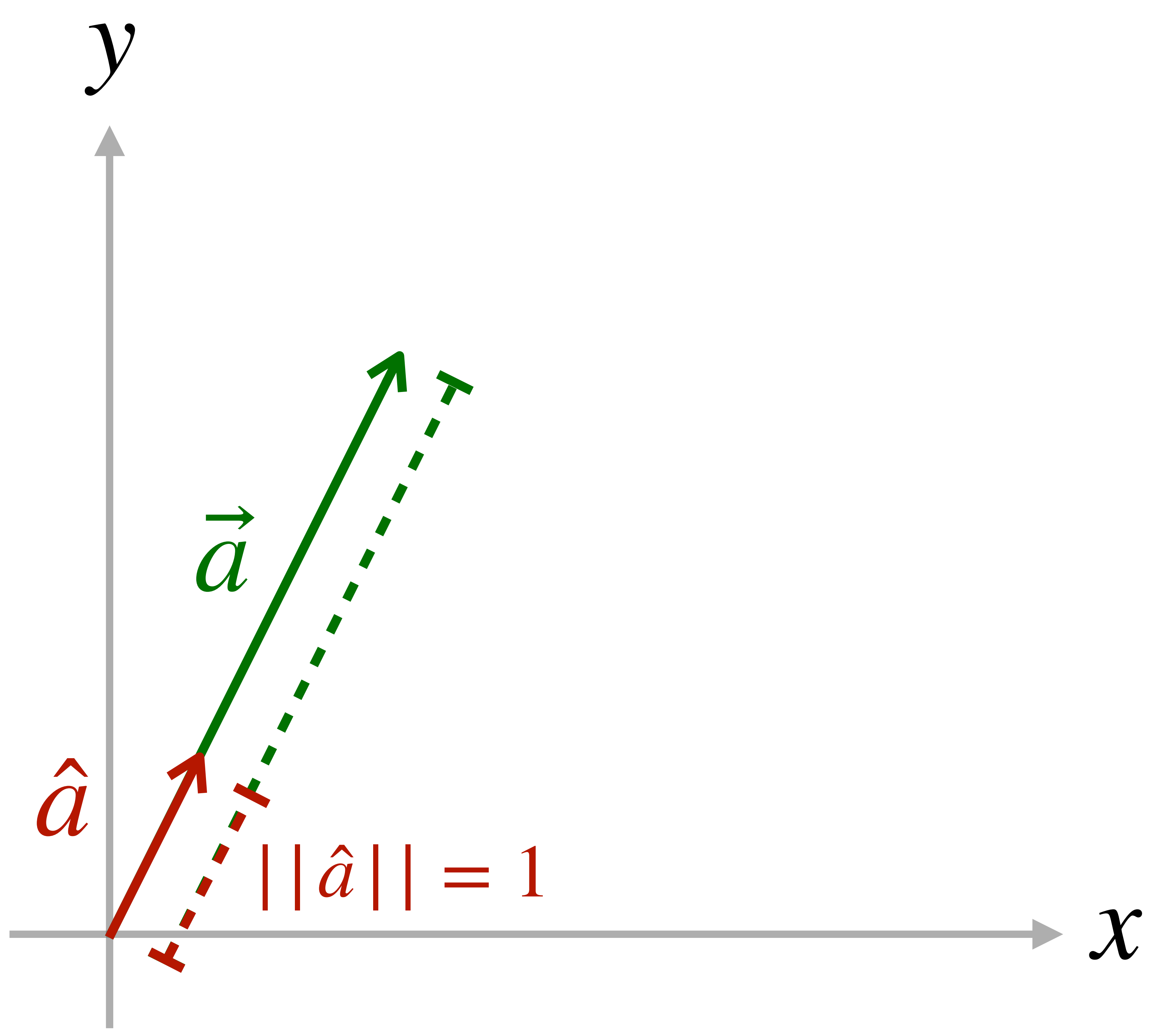
$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Geometricamente

- A magnitude representa o comprimento do vetor
- Em jogos, quando vamos comparar a magnitude de dois vetores (e.g., qual inimigo está mais próximo do jogador), utilizamos o quadrado do comprimento, para evitar o cálculo das raízes quadradas.
- Se s for negativo, a multiplicação irá inverter a direção de $\vec{a}$.

Normalização

A **normalização** é definida pela divisão de todos os componentes do vetor $\vec{a}$ pelo seu comprimento $||\vec{a}||$:



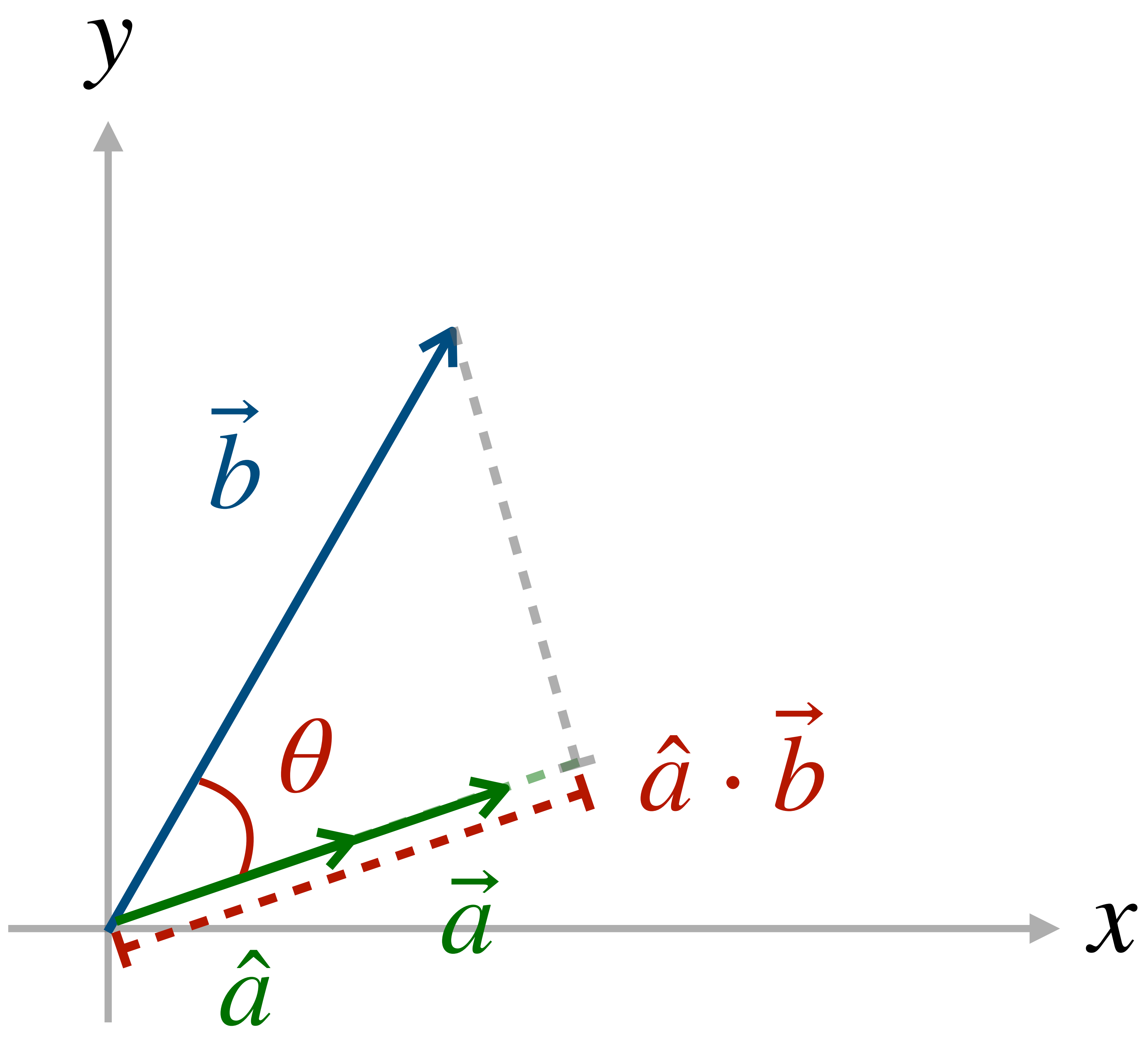
$$\hat{a} = [\frac{a_x}{||\vec{a}||}, \frac{a_y}{||\vec{a}||}, \frac{a_z}{||\vec{a}||}]$$

Geometricamente

- A normalização converte um vetor não-unitário $\vec{a}$ em um vetor unitário $\hat{a}$, sendo que um vetor unitário $\hat{a}$ é um vetor de magnitude $||\hat{a}|| = 1$.

Produto Escalar

O **produto escalar** entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definido pela soma das multiplicações dos componentes de $\vec{a}$ com seus componentes correspondentes em $\vec{b}$:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Geometricamente

- O produto escalar pode ser utilizado para calcular o ângulo θ entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

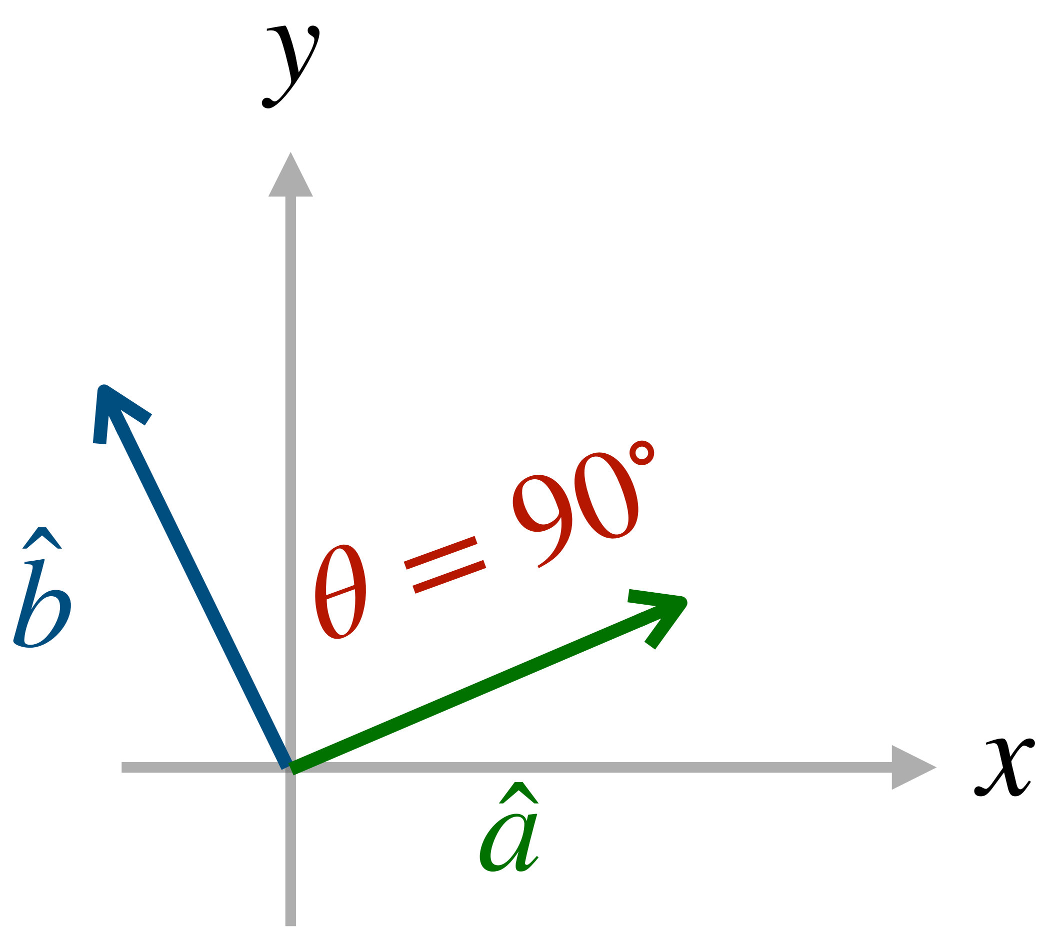
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||||\vec{b}||cos\theta$$

$$\theta = arccos(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}||||\vec{b}||})$$

- Se $\hat{a}$ for um vetor unitário, $\hat{a} \cdot \vec{b}$ é o comprimento da projeção de $\vec{b}$ em $\hat{a}$.

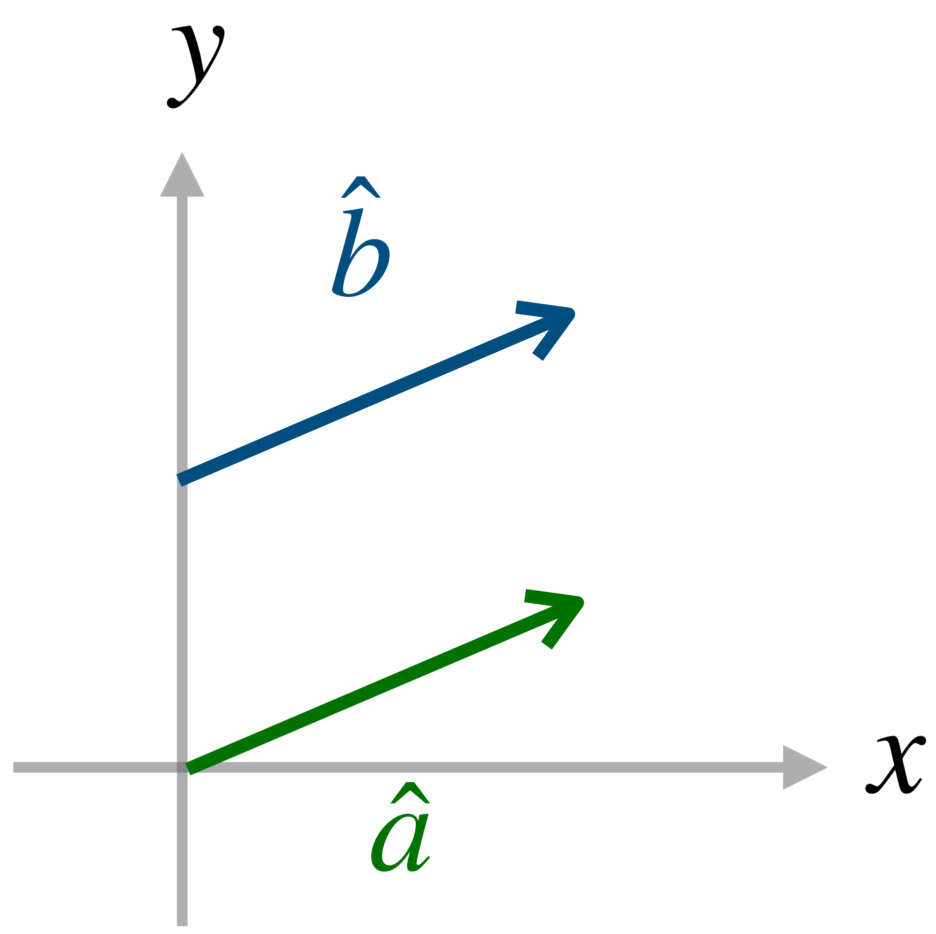
Produto Escalar

$\hat{a}$ e $\hat{b}$
Perpendiculares



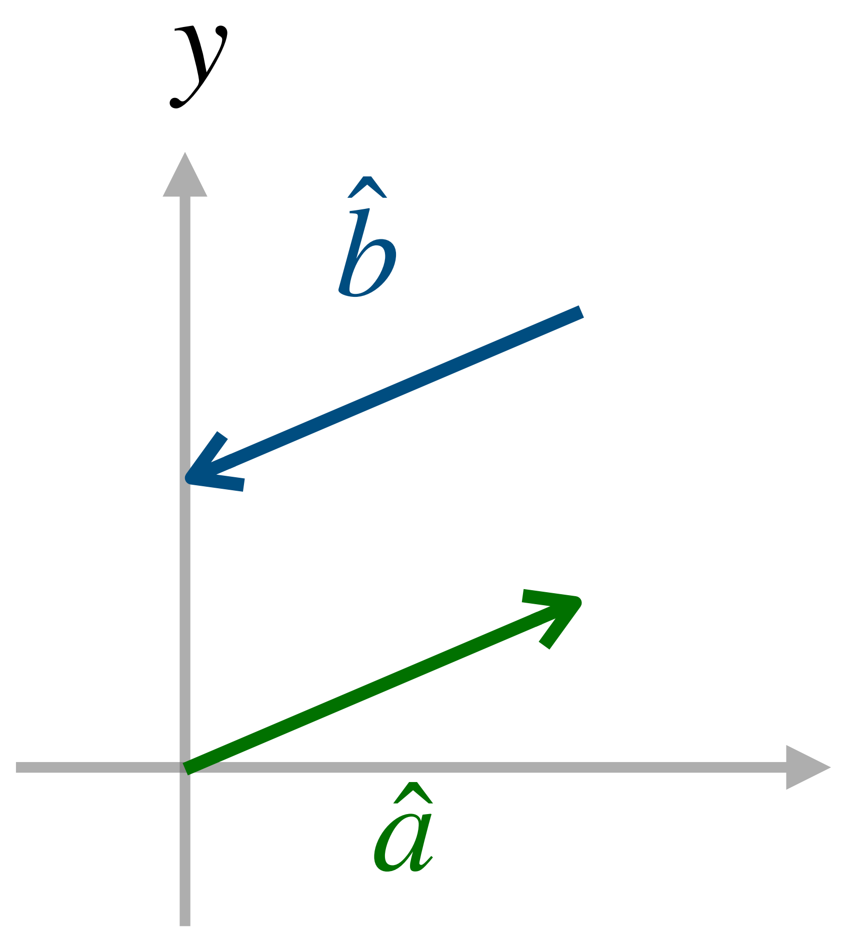
$$\hat{a} \cdot \hat{b} = cos(90) = 0$$

$\hat{a}$ e $\hat{b}$
Paralelos
Mesma direção



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = cos(0) = 1$$

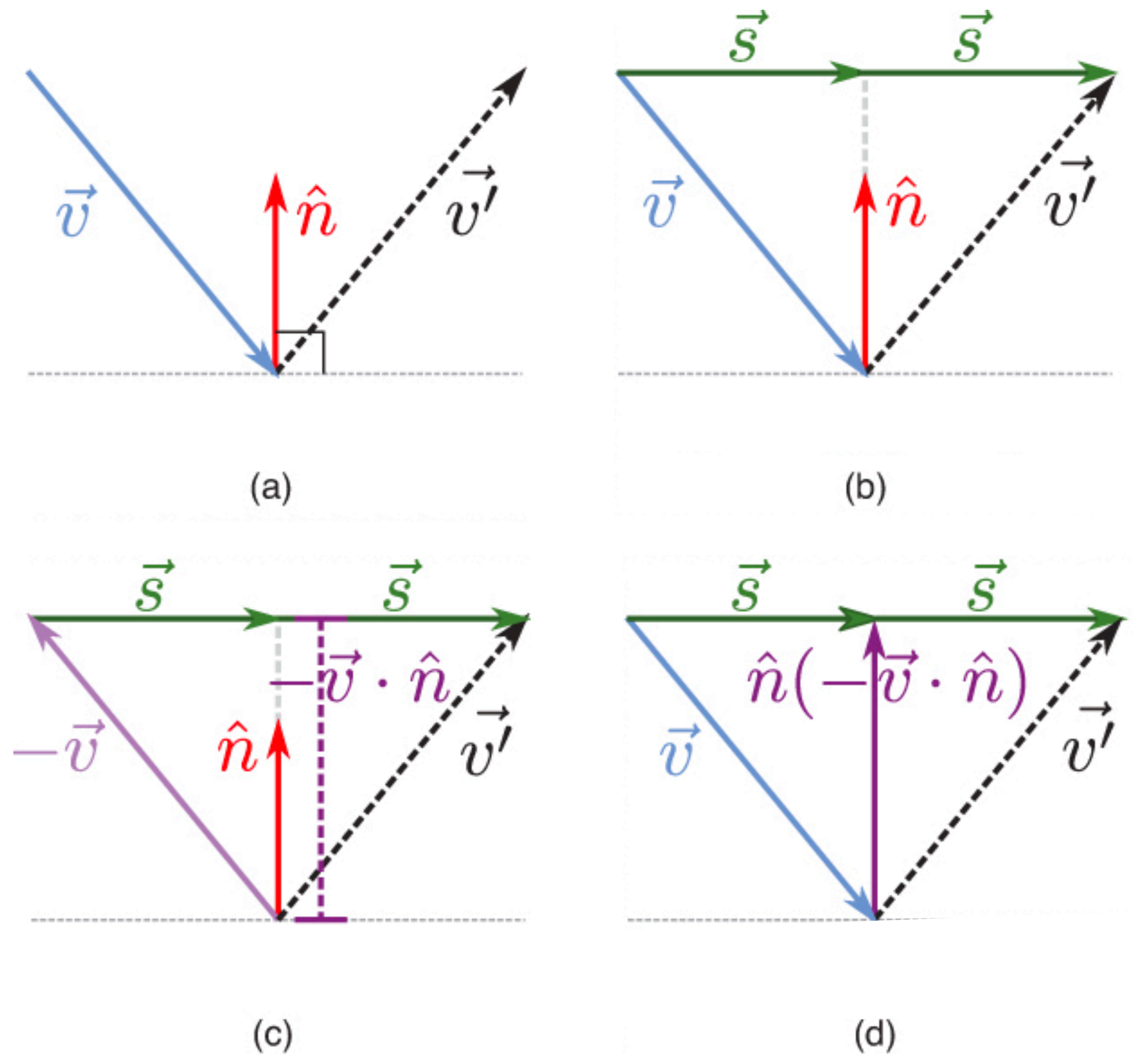
$\hat{a}$ e $\hat{b}$
Paralelos
Direções opostas



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = cos(180) = -1$$

Exercício 1: Pong (Reflexão)

Calcular a reflexão $\vec{v}'$ de um vetor $\vec{v}$ que incide sobre uma superfície de normal $\hat{n}$:



(b) Definir $\vec{v}'$ em função de $\vec{s}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{v}' = 2\vec{s} - \vec{v}$$

(c) Definir $\vec{s}$ em função de $\vec{v}$ e $\hat{n}$:

$$\vec{s} = \vec{v} + \hat{n}(-\vec{v}\cdot\hat{n})$$

(d) Substituir (c) em (b):

$$\vec{v}' = 2(\vec{v} + \hat{n}(-\vec{v}\cdot\hat{n})) - \vec{v}$$

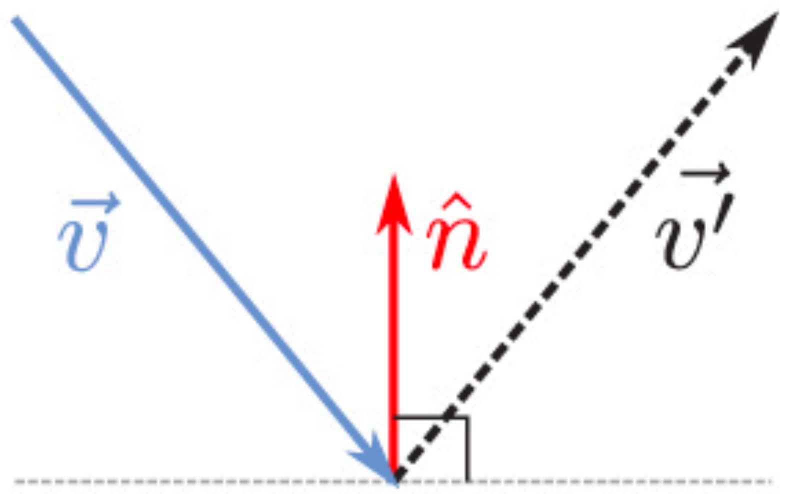
$$\vec{v}' = 2\vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v}\cdot\hat{n}) - \vec{v}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v}\cdot\hat{n})$$

Exercício 1: Pong (Reflexão)

Essa fórmula vale para qualquer normal $\hat{n}$, mas no Pong só precisamos considerar dois casos:

- Parece inferior: $\hat{n}_b = (0, -1)$



$$\vec{v}' = \vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

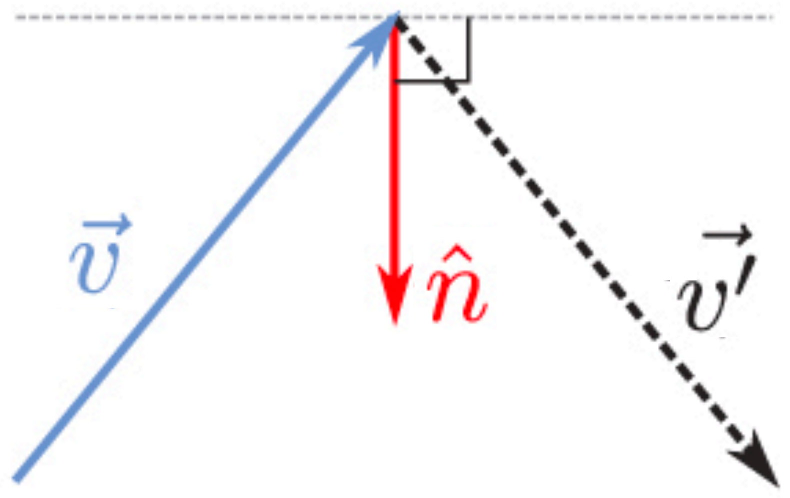
$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + 2(0, -1)(-(v_x, v_y) \cdot (0, -1))$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0, -2)(-v_x 0 + (-v_y)(-1))$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0, -2)v_y$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0, -2v_y) = \boxed{(v_x, -v_y)}$$

- Parede superior: $\hat{n}_t = (0,1)$



$$\vec{v}' = \vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + 2(0,1)(-(v_x, v_y) \cdot (0,1))$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0,2)(-v_x 0 + (-v_y)1)$$

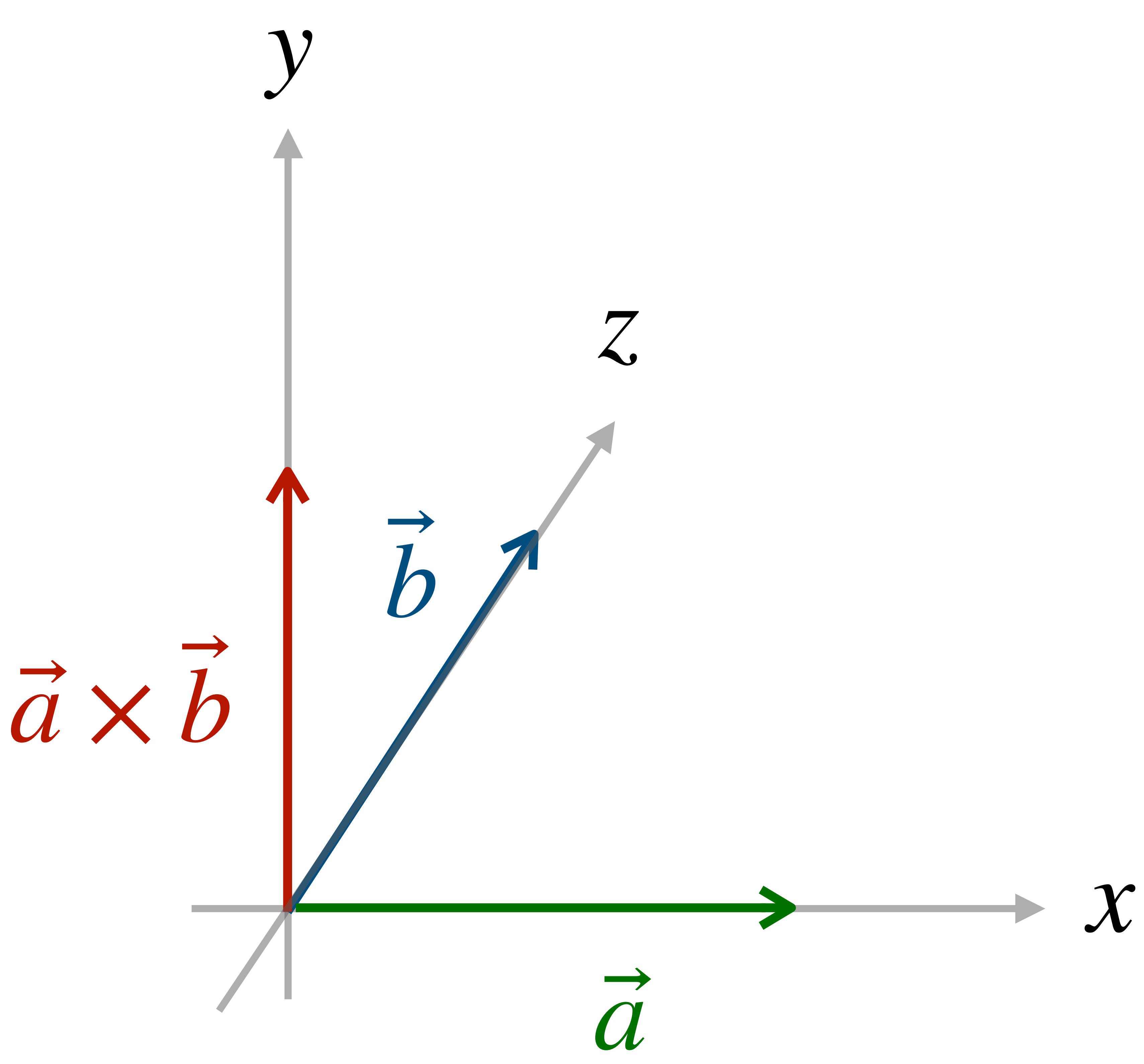
$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0,2)(-v_y)$$

$$\vec{v}' = (v_x, v_y) + (0, -2v_y) = \boxed{(v_x, -v_y)}$$

Quando a normal é alinhada com o eixo do sistema de coordenadas, como no Pong, basta inverter o sinal da componente diferente de zero.

Produto Vetorial

O produto vetorial entre dois vetores 3D $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definido pelo determinante da matríz:



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

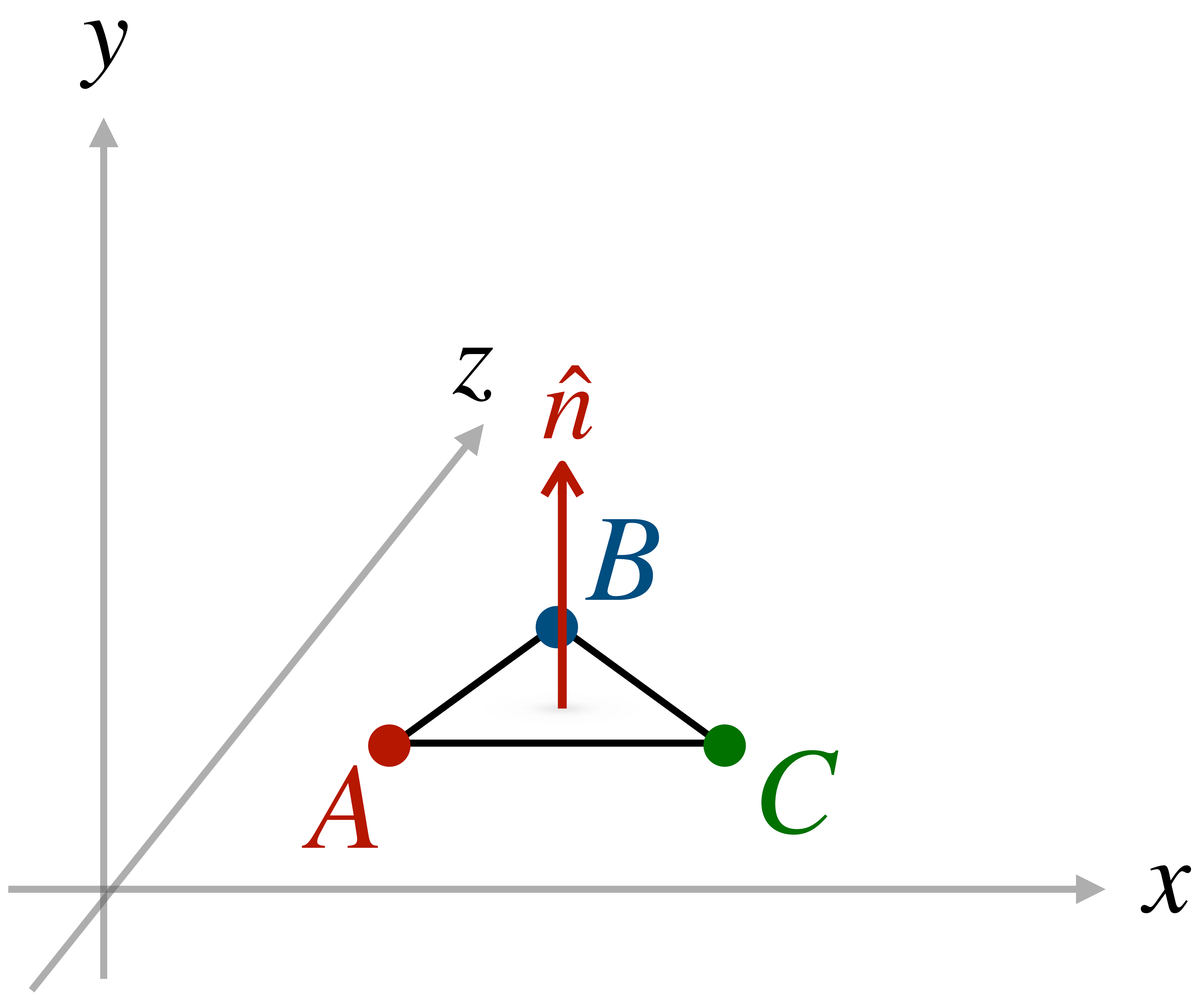
$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x]$$

Geometricamente

- $\vec{a} \times \vec{b}$ é o vetor normal ao plano desses dois vetores.
- **O produto vetorial não é definido em 2D!**

Exercício 2: Encontrar Normal de Superfície

Calcular o vetor normal $\hat{n}$ a superfície do triângulo ABC definido em um espaço 3D.



$$\vec{u} = B - A$$
$$\vec{v} = C - A$$
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$
$$\hat{n} = norm(n)$$

Próxima aula

A6: Forças e Objetos Rígidos

- Forças como vetores
- Propriedades de objetos rígidos
- Métodos numéricos para mecânica linear
- Aceleração da gravidade
- Resistência de ar e fluídos