

INF216

2023/2



Projeto e Implementação de Jogos Digitais

A3: Álgebra Linear

Logística

Avisos

- ▶ Não teremos laboratório nessa sexta-feira (Semana de Infomática)!

Última aula

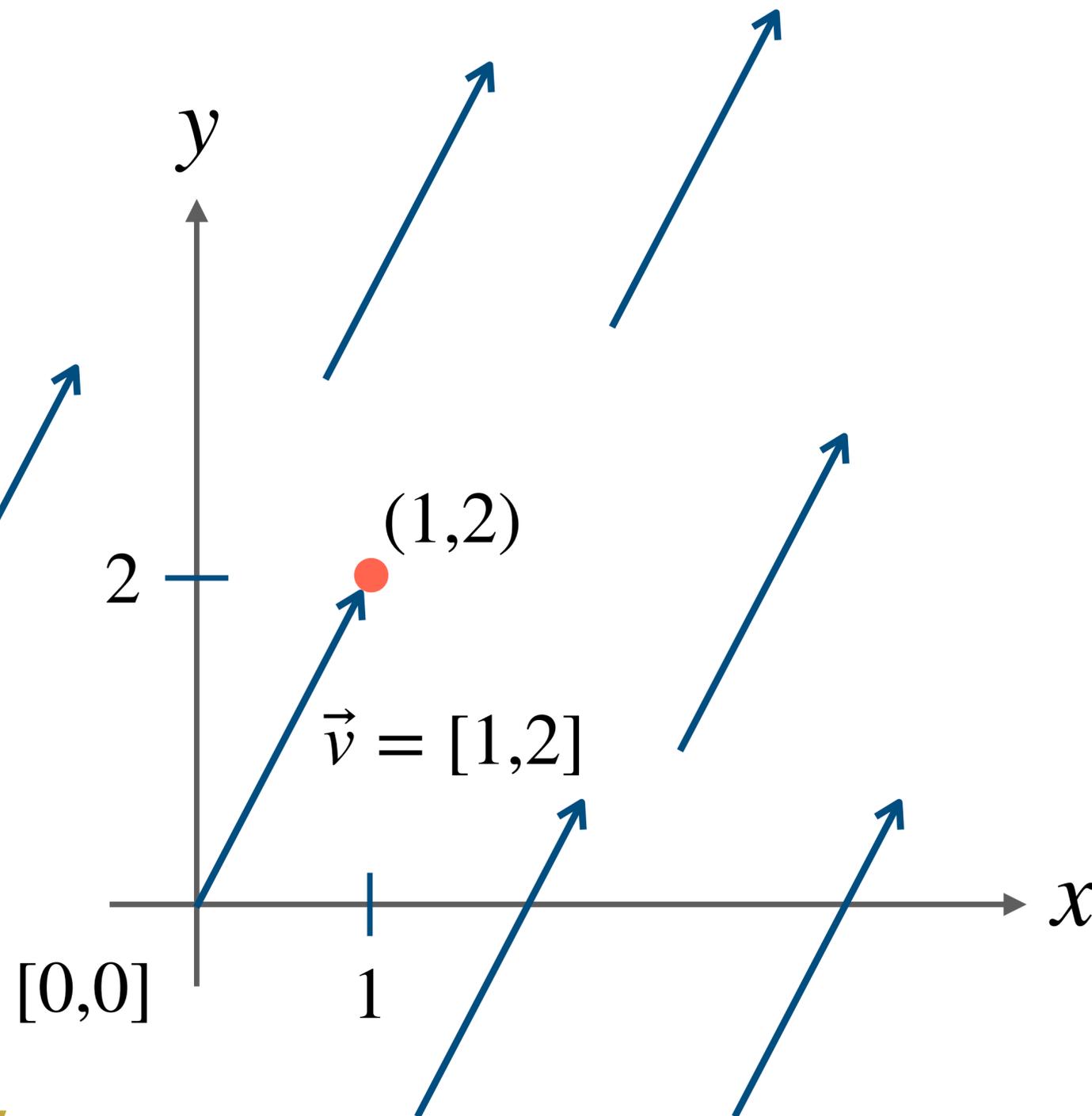
- ▶ Game loop
- ▶ Modelagem de objetos

Plano de Aula

- ▶ Vetores
 - ▶ Definição
 - ▶ Operações
 - ▶ Aplicações
- ▶ Matrizes de transformação
 - ▶ Translação, rotação e escala
 - ▶ Coordenadas homogêneas
 - ▶ Composição de transformações

Vetores

Vetores



Em Álgebra Linear, um **vetor** \vec{v} representa uma direção, um sentido e um comprimento em um espaço n -dimensional.

Por exemplo, um vetor $2D$ é definido como:

$$\vec{v} = [v_x, v_y] \in R^2$$

- ▶ Vetores são independentes de posição, ou seja, dois vetores de mesma direção, sentido e comprimento são iguais!
- ▶ No entanto, é conveniente desenhar vetores com a **cauda** (ponto de partida) na origem $(0,0)$ de tal forma que a **cabeça** (ponto de destino) aponte para uma posição específica no espaço.

Vetores

```
class Vector2 {  
    float x,  
    float y  
}
```

```
class Vector3 {  
    float x,  
    float y,  
    float z  
}
```

Em jogos digitais, geralmente usamos vetores 2D e 3D, dependendo dos gráficos de jogo.

Além disso, vetores 4D também são usados em jogos 3D para combinar transformações (e.g., rotação e translação)

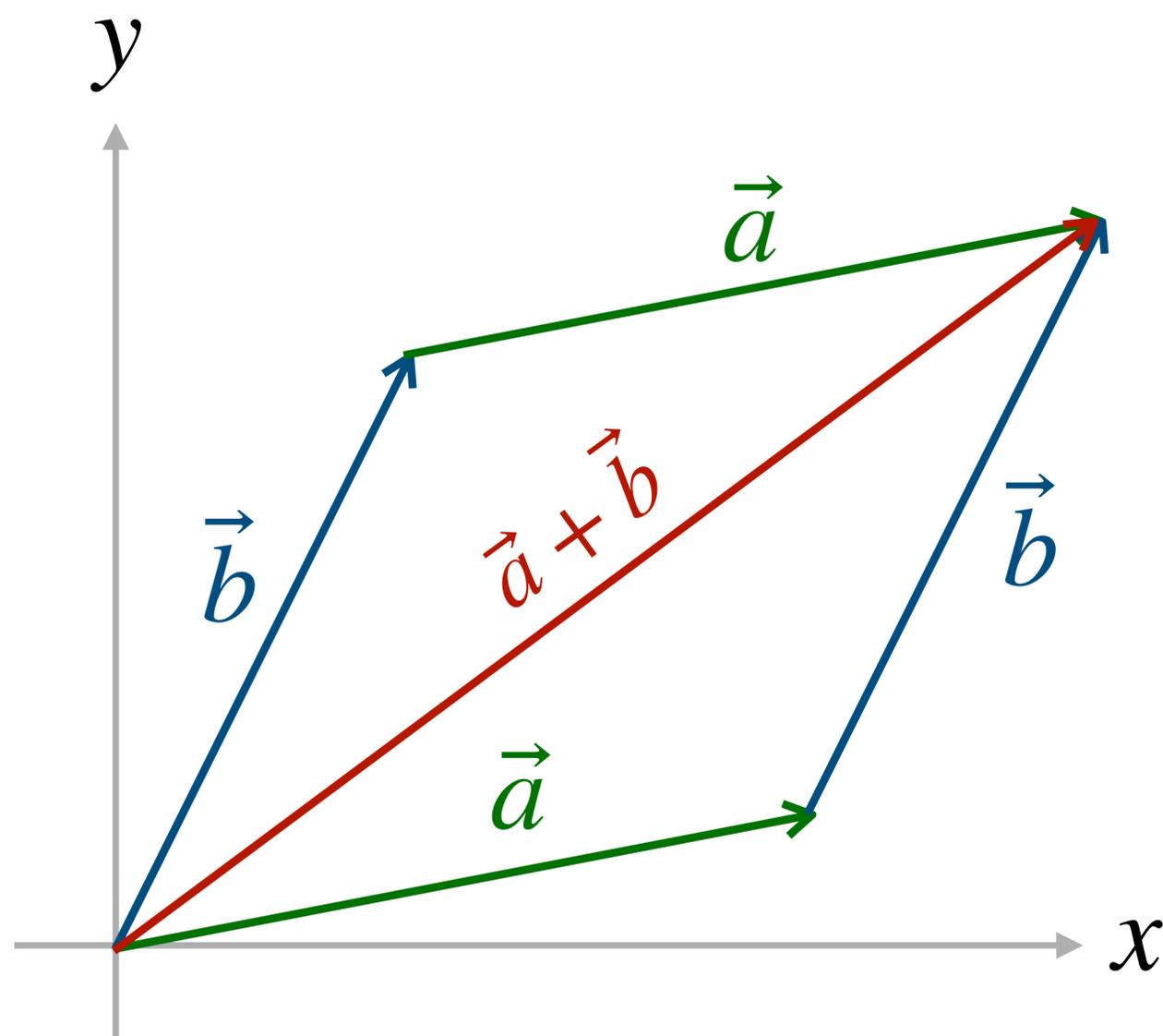
Em código, vetores geralmente são representados por uma classe com um atributo float por dimensão.

Operações

Diversas operações podem ser realizadas com vetores:

- ▶ Adição
- ▶ Subtração
- ▶ Comprimento
- ▶ Normalização
- ▶ Multiplicação por Escalar
- ▶ Produto Escalar
- ▶ Produto Vetorial

Adição



Algebricamente

A adição de dois vetores \vec{a} e \vec{b} é definida pela soma dos componentes de \vec{a} com seus componentes correspondentes em \vec{b} :

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$$

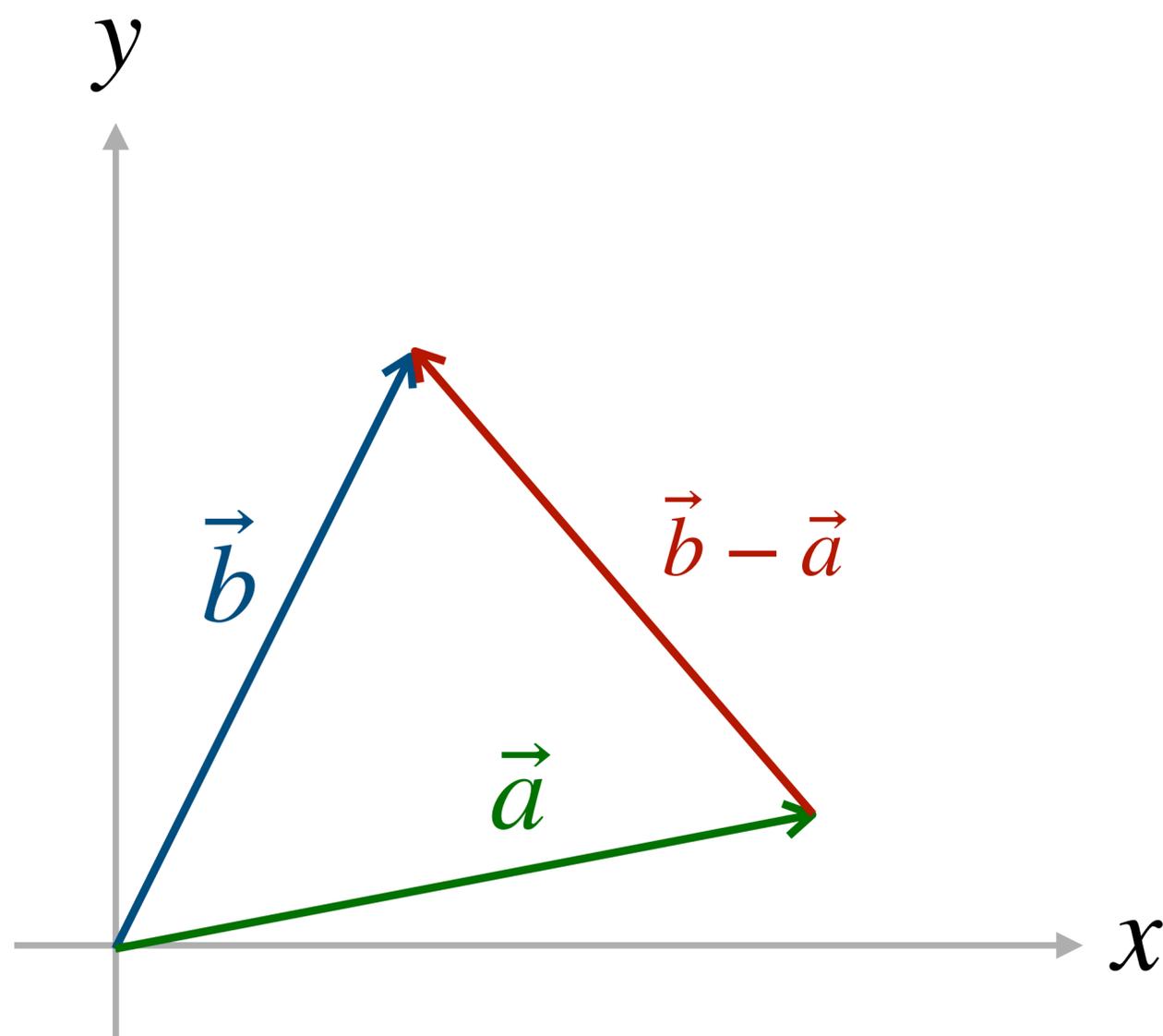
Geometricamente

A adição pode ser realizada posicionando a cauda de \vec{b} na cabeça de \vec{a} , e desenhando um vetor da cauda de \vec{a} até a cabeça de \vec{b} .

Note que se fizermos a soma na ordem inversa $\vec{b} + \vec{a}$, o vetor resultante é o mesmo.

Regra do paralelogramo: $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$

Subtração



Algebricamente

A subtração de dois vetores \vec{b} e \vec{a} é definida pela subtração dos componentes de \vec{b} pelo seus componentes correspondentes em \vec{a} :

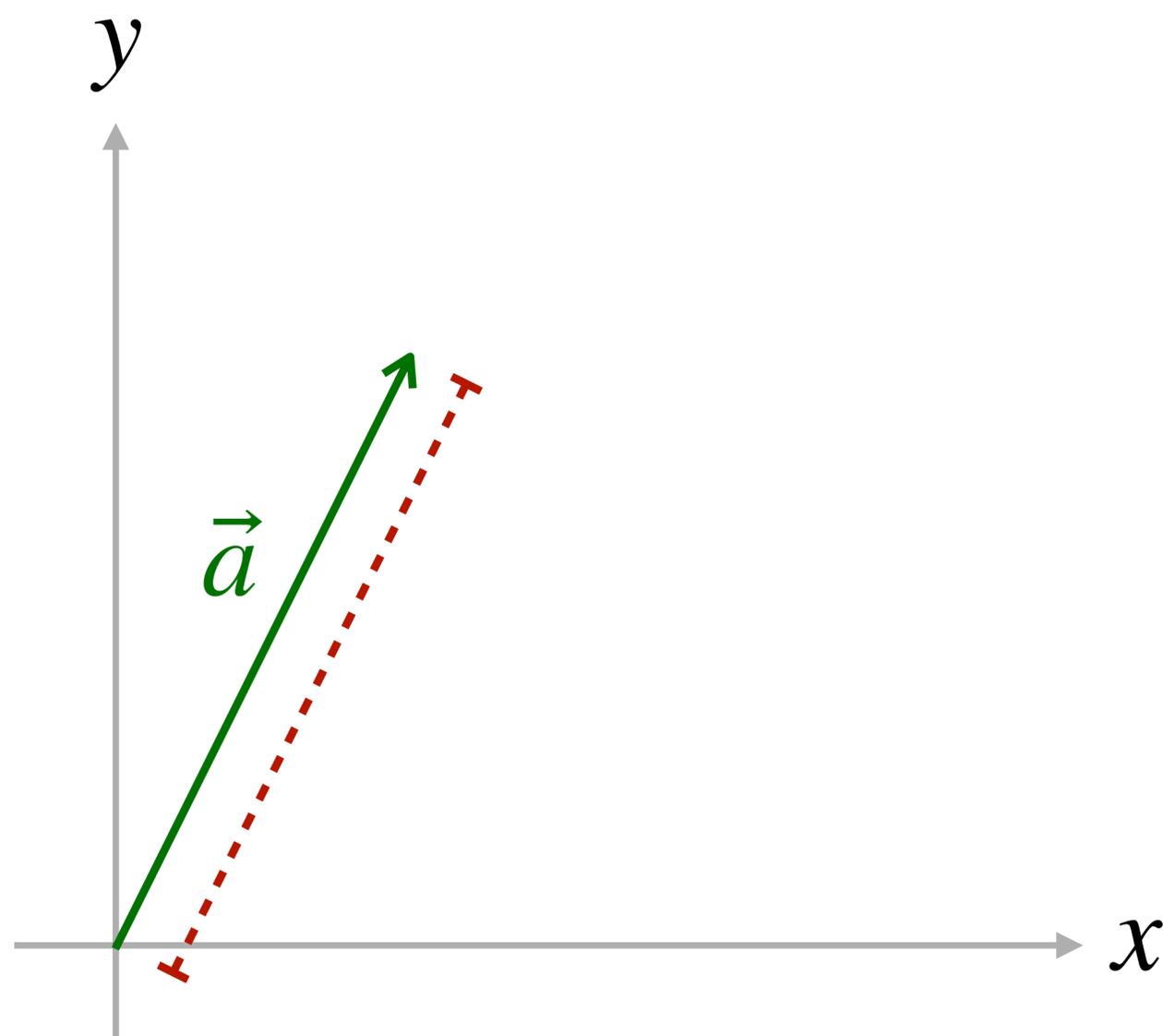
$$\vec{b} - \vec{a} = [b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z]$$

Geometricamente

A subtração pode ser realizada posicionando as caudas de \vec{a} e \vec{b} na mesma posição, e desenhando um vetor da cabeça de \vec{a} até a cabeça de \vec{b} .

Note que se fizermos a subtração na ordem inversa $\vec{a} - \vec{b}$, o vetor resultante será diferente. Por isso, a subtração não é comutativa.

Comprimento

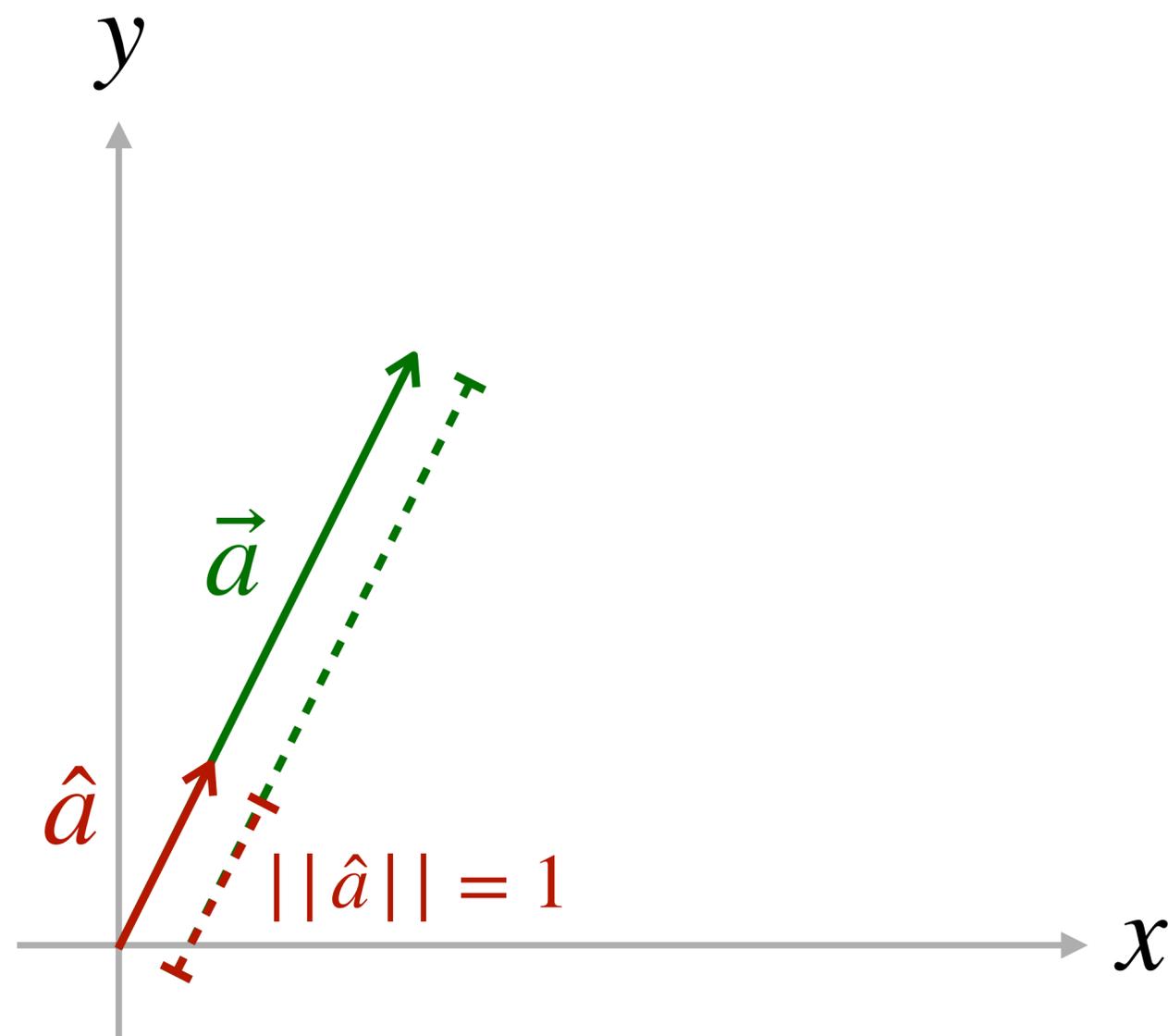


Para calcular o comprimento $||\vec{a}||$ de um vetor \vec{a} , calculamos a distância euclidiana entre a origem e o ponto ao qual \vec{a} aponta:

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Em jogos, quando vamos comparar o comprimento de dois vetores (e.g., qual inimigo está mais próximo do jogador), utilizamos o quadrado do comprimento, para evitar o cálculo das raízes quadradas.

Normalização



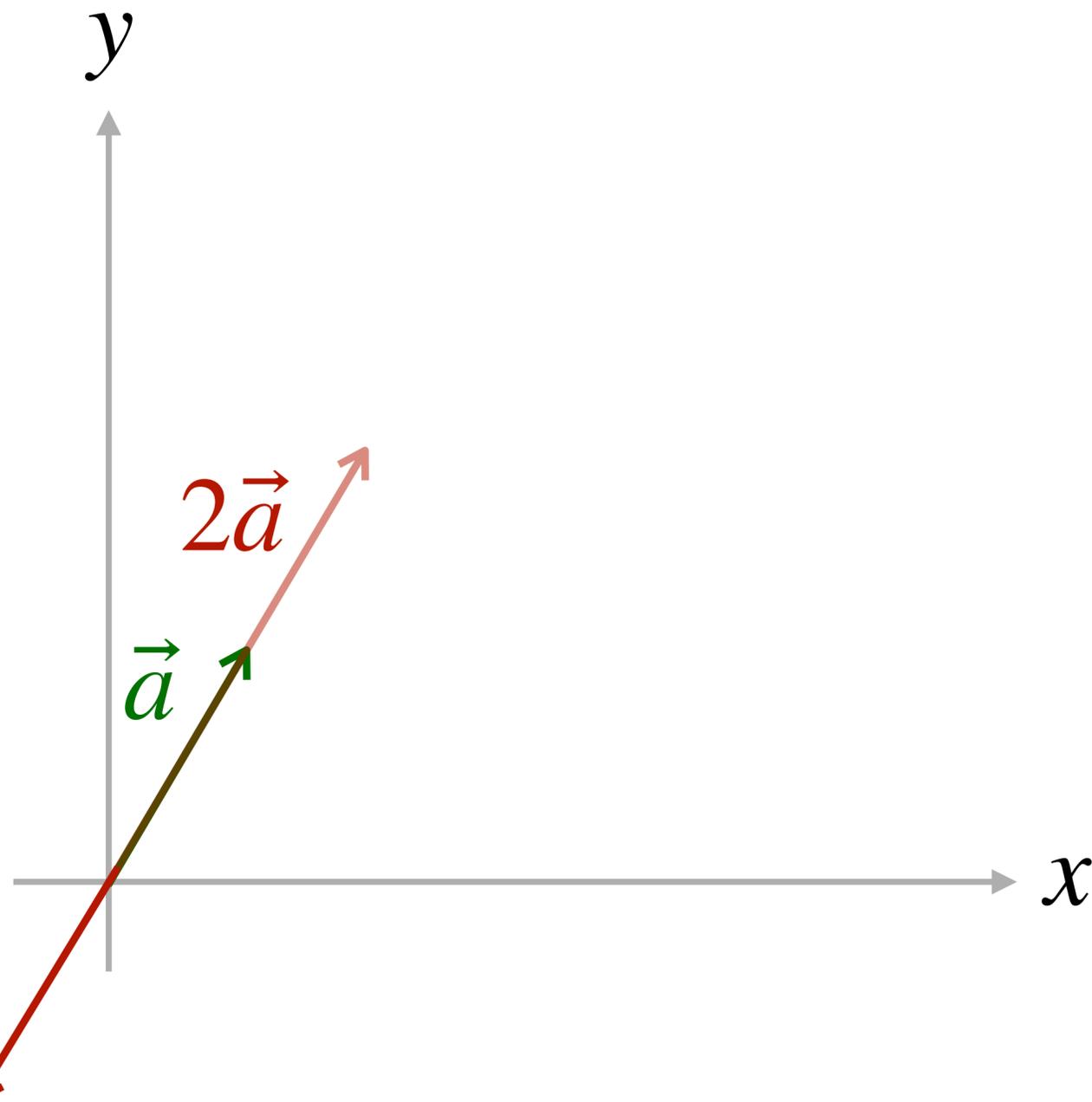
Um vetor \hat{a} unitário é um vetor de comprimento $||\hat{a}|| = 1$.

A operação que converte um vetor não-unitário \vec{a} em um vetor unitário \hat{a} é chamada de **normalização**.

Para normalizar um vetor não-unitário \vec{a} , dividimos todas os seus componentes pelo seu comprimento $||\vec{a}||$:

$$\hat{a} = \left[\frac{a_x}{||\vec{a}||}, \frac{a_y}{||\vec{a}||}, \frac{a_z}{||\vec{a}||} \right]$$

Multiplicação (Escalar)



Algebricamente

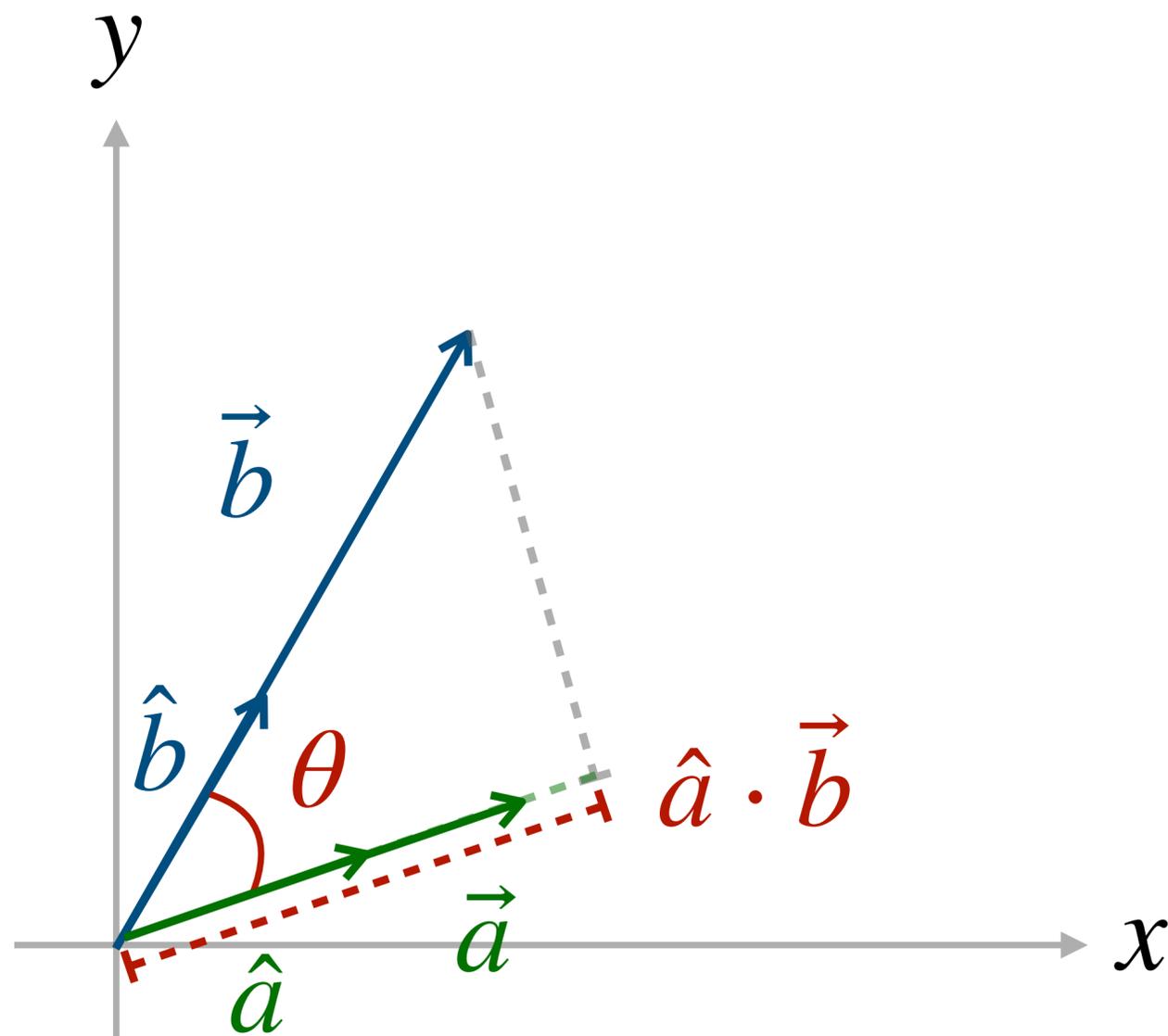
A multiplicação de um vetor \vec{a} por um escalar s é definida pela multiplicação de todos os componentes de \vec{a} por s :

$$s \cdot \vec{a} = [s \cdot a_x, s \cdot a_y, s \cdot a_z]$$

Geometricamente

A multiplicação por escalar altera apenas o comprimento de \vec{a} . Se s for negativo, a multiplicação irá inverter a direção de \vec{a} .

Produto Escalar



Algebricamente

O produto escalar entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} é definido pela soma das multiplicações dos componentes de \vec{a} com seus componentes correspondentes em \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Geometricamente

O produto escalar pode ser utilizado para calcular o ângulo θ entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} :

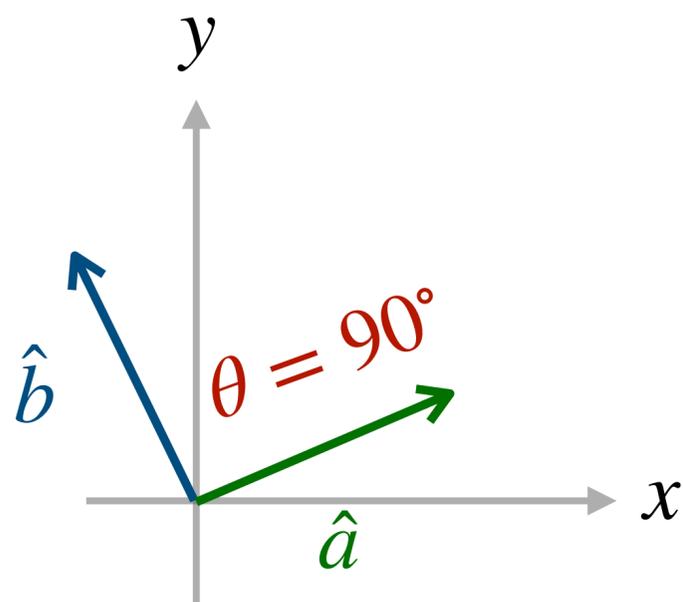
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}\right)$$

Além disso, se \hat{a} for um vetor unitário, $\hat{a} \cdot \vec{b}$ é o comprimento da projeção de \vec{b} em \hat{a} .

Produto Escalar

\hat{a} e \hat{b}

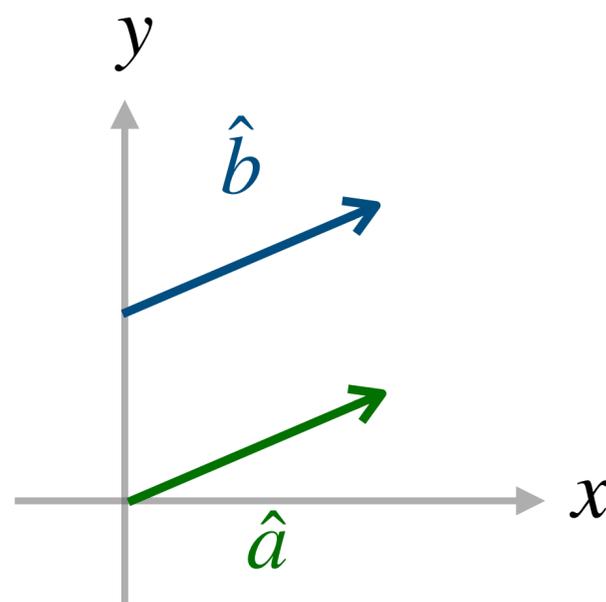
Perpendiculares



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(90) = 0$$

\hat{a} e \hat{b}

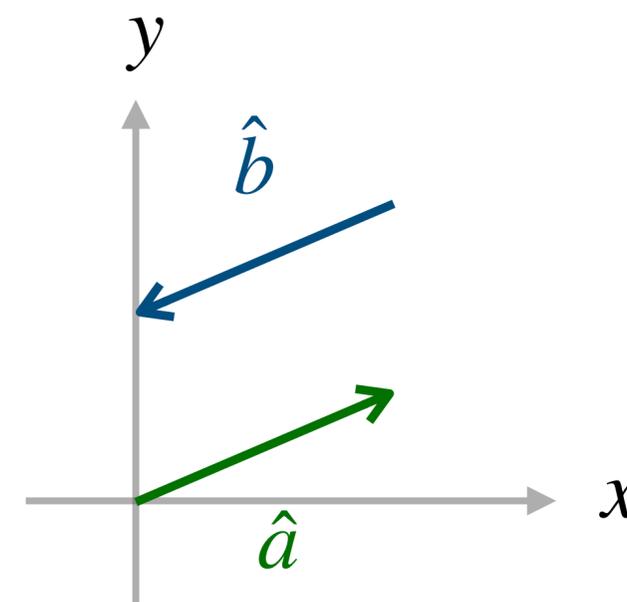
Paralelos
Mesma direção



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(0) = 1$$

\hat{a} e \hat{b}

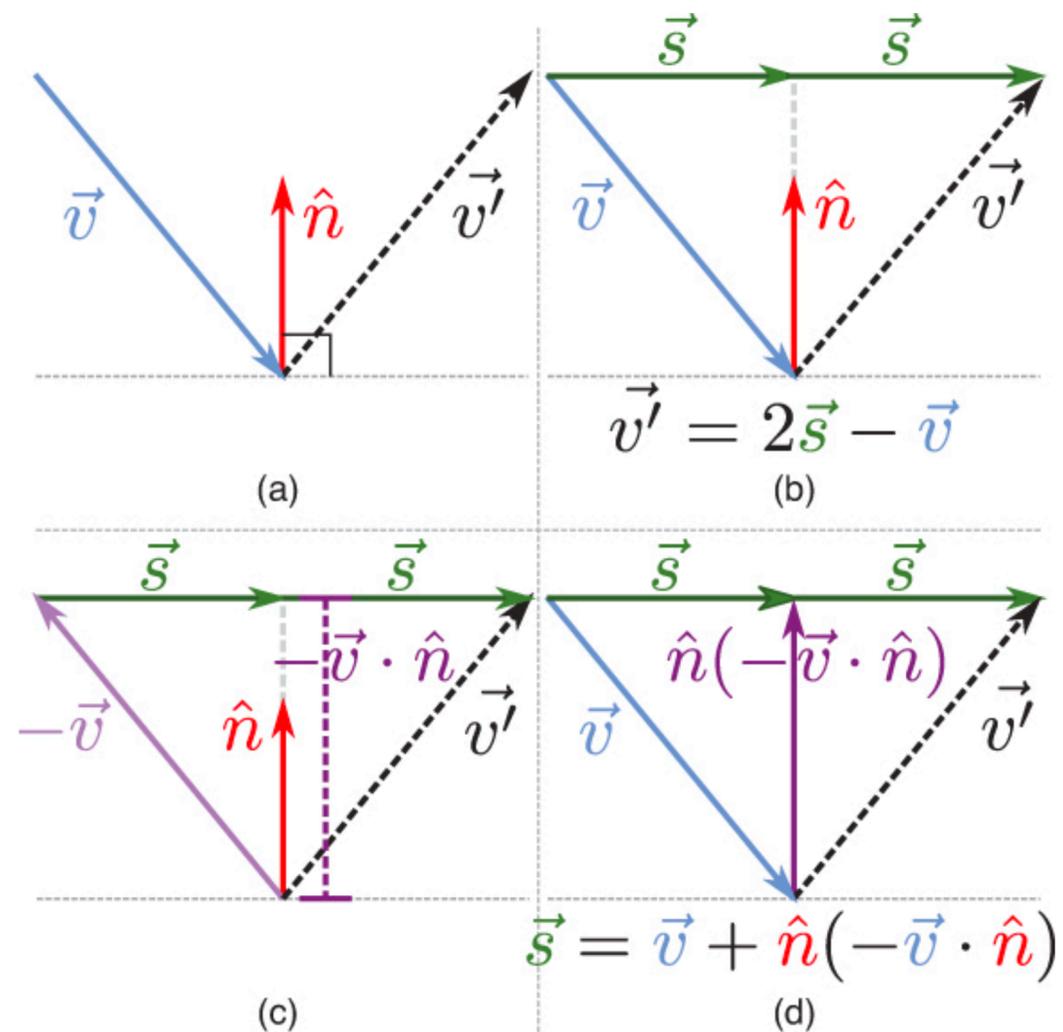
Paralelos
Direções opostas



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(180) = -1$$

Exercício

Calcular a reflexão \vec{v}' de um vetor \vec{v} que incide sobre uma superfície de normal \hat{n} :



$$(b) \vec{v}' = 2\vec{s} - \vec{v}$$

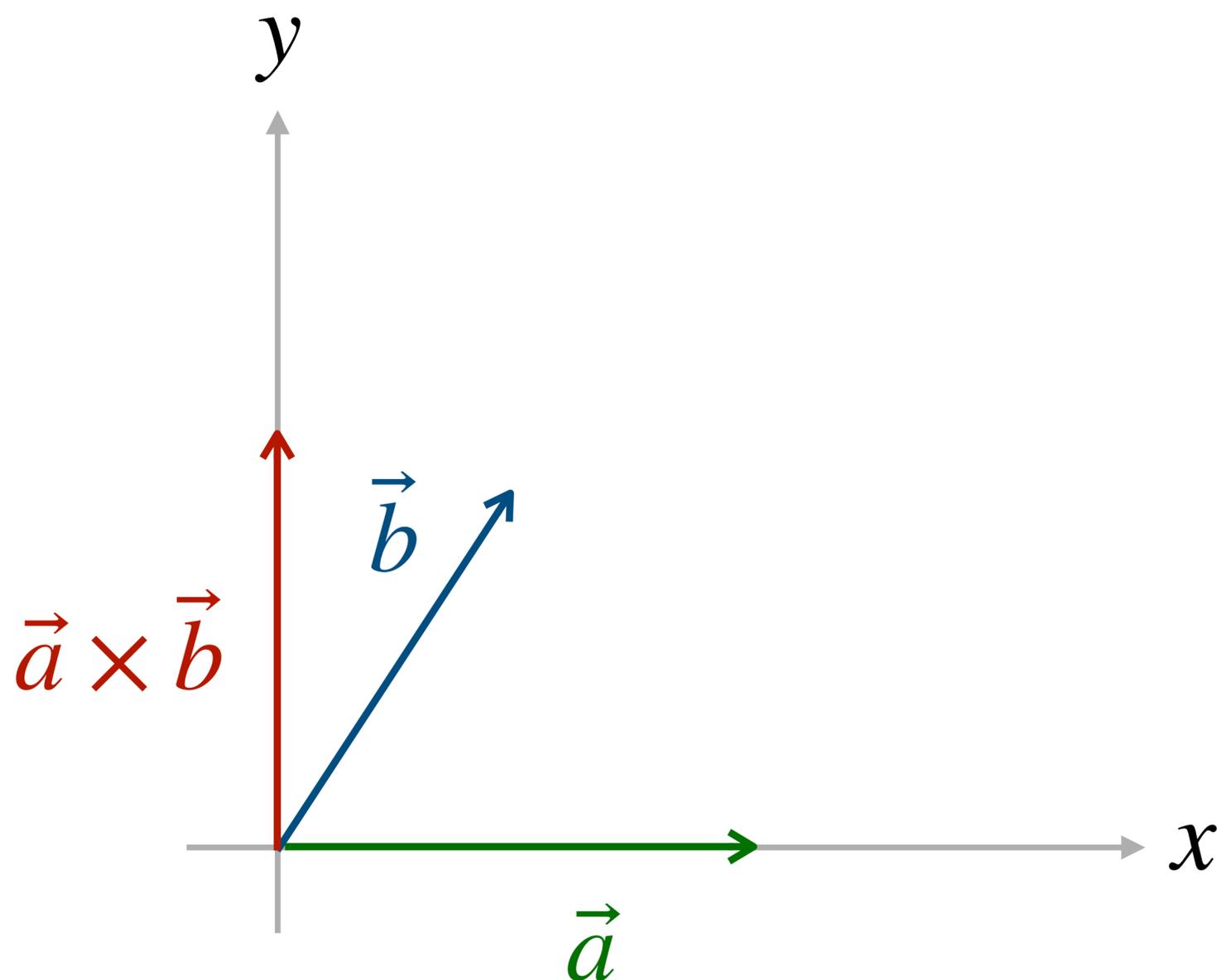
$$(c) \vec{s} = \vec{v} + \hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

$$(d) \vec{v}' = 2(\vec{v} + \hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})) - \vec{v}$$

$$\vec{v}' = 2\vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n}) - \vec{v}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

Produto Vetorial



Algebricamente

O produto vetorial entre dois vetores 3D \vec{a} e \vec{b} é definido pelo determinante da matriz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x]$$

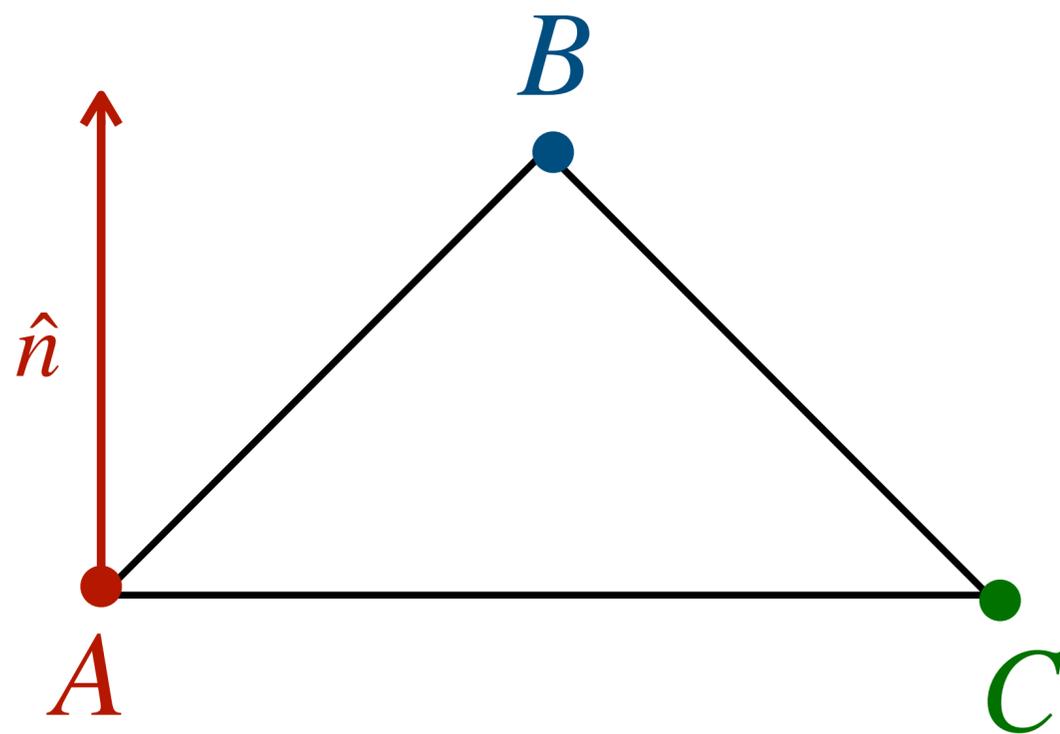
Geometricamente

$\vec{a} \times \vec{b}$ é o vetor normal ao plano desses dois vetores.

Obs: produto vetorial não é definido em 2D!

Exercício

Calcular o vetor normal \hat{n} ao triângulo ABC:



$$\vec{u} = B - A$$

$$\vec{v} = C - A$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\hat{n} = \text{norm}(n)$$

Matrizes de Transformação

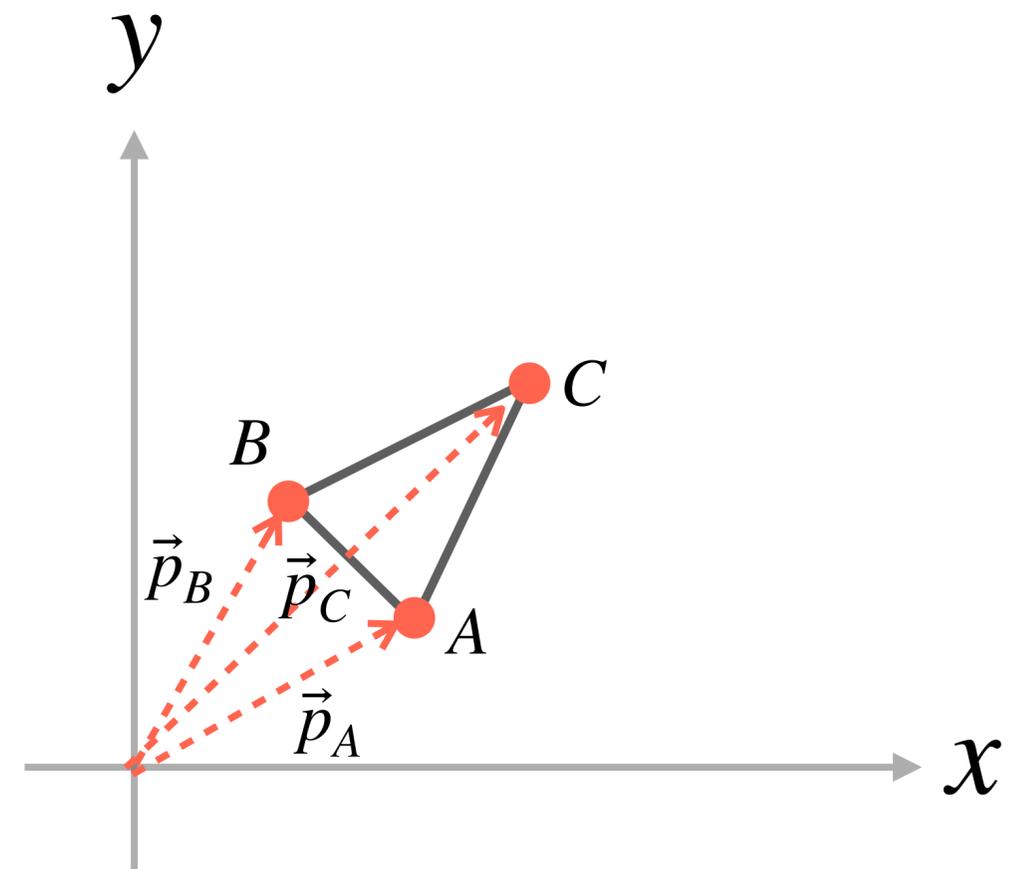
Transformações Geométricas

Transformações Geométricas são operações aplicadas aos **vértices** de um objeto para mudar sua:

- ▶ Posição (Translação)
- ▶ Orientação (Rotação)
- ▶ Tamanho (Escala)

Os vértices são representados como vetores

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

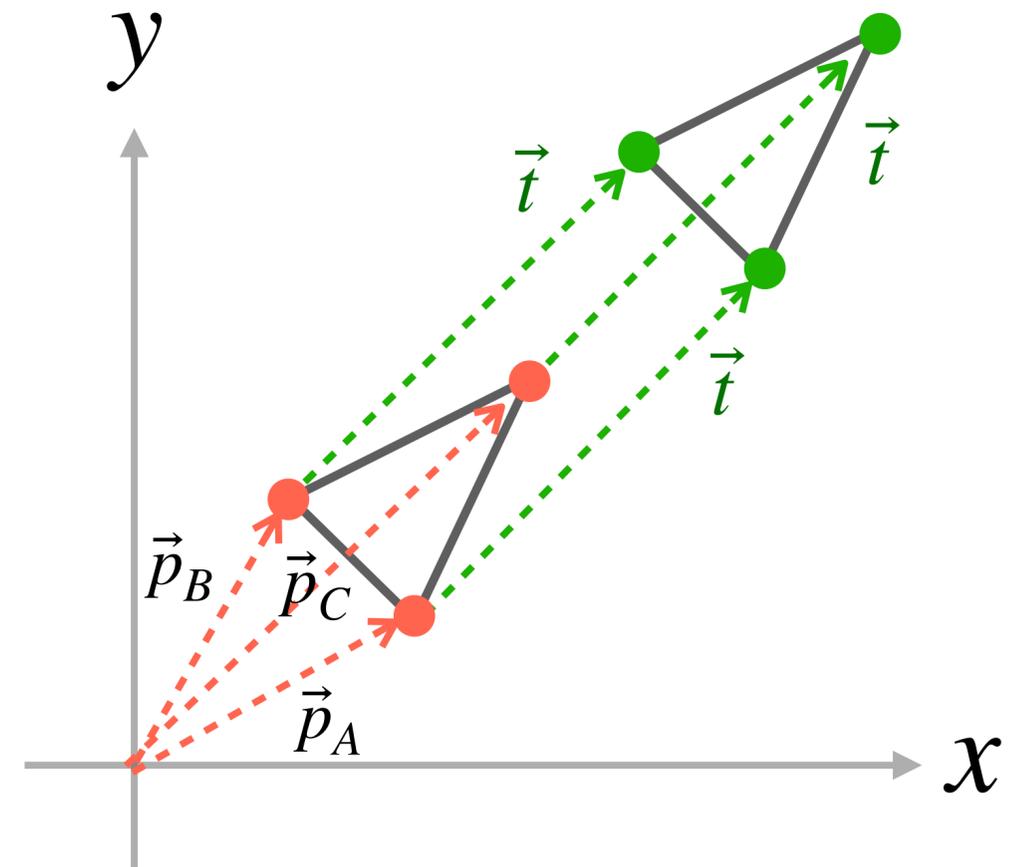


Translação

A translação representada pelo vetor \vec{t} altera a posição do objeto no espaço:

$$\vec{p}' = \vec{p} + \vec{t}$$

$$\vec{p}' = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$



Rotação

A rotação representada pela matriz R altera a orientação do objeto no espaço:

$$\vec{p}' = R \vec{p} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x = r \cdot \cos \alpha$$

$$y = r \cdot \sin \alpha$$

$$x = r \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

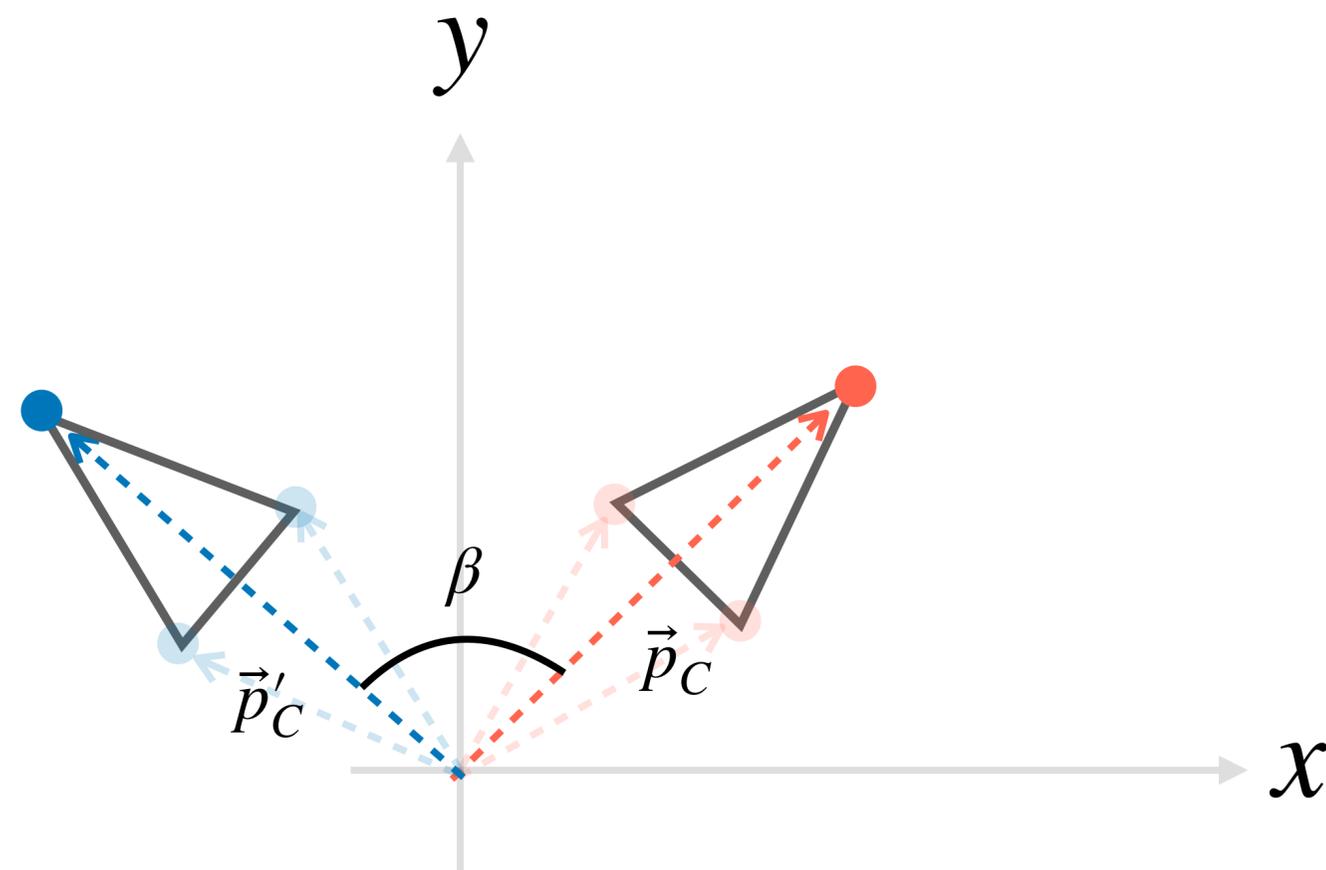
$$y' = r \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$x' = r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$y' = r \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta + r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$x' = x \cdot \cos \beta - y \cdot \sin \beta$$

$$y' = x \cdot \sin \beta + y \cdot \cos \beta$$

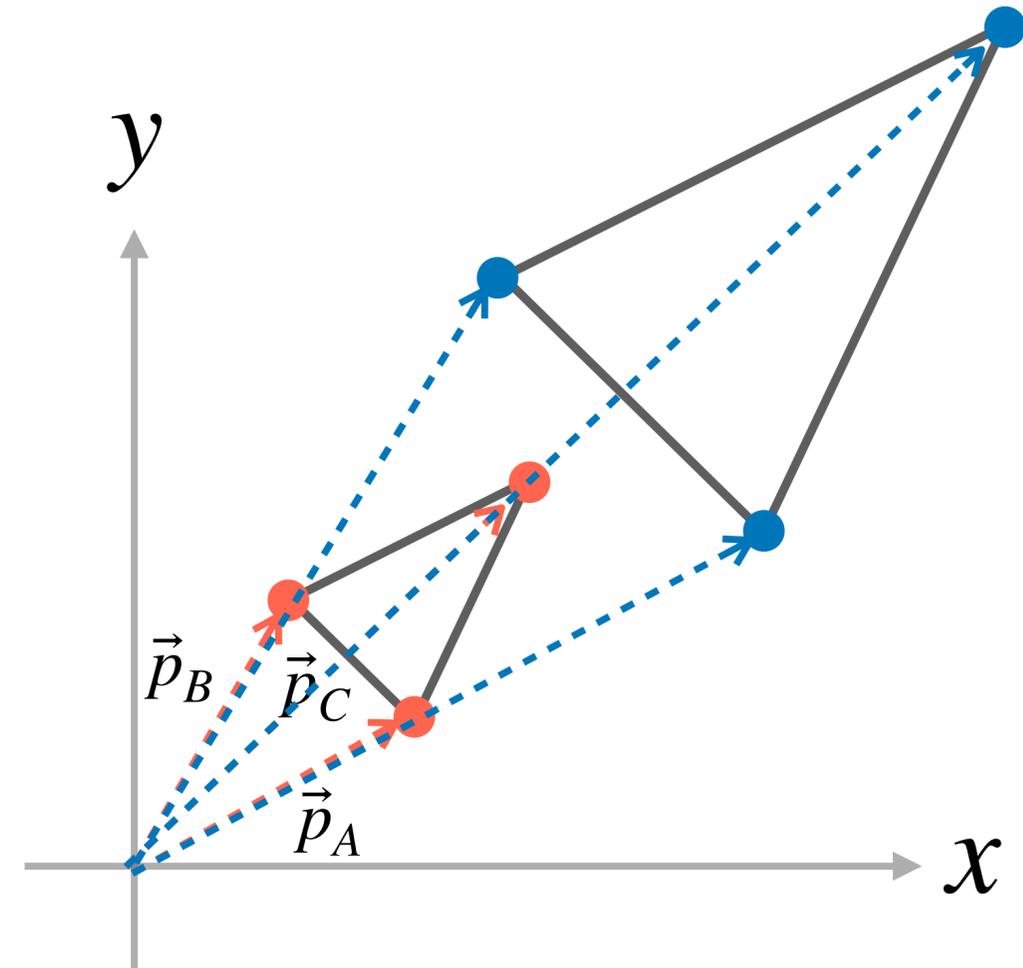


Escala

A escala representada pela matriz S altera o tamanho do objeto no espaço:

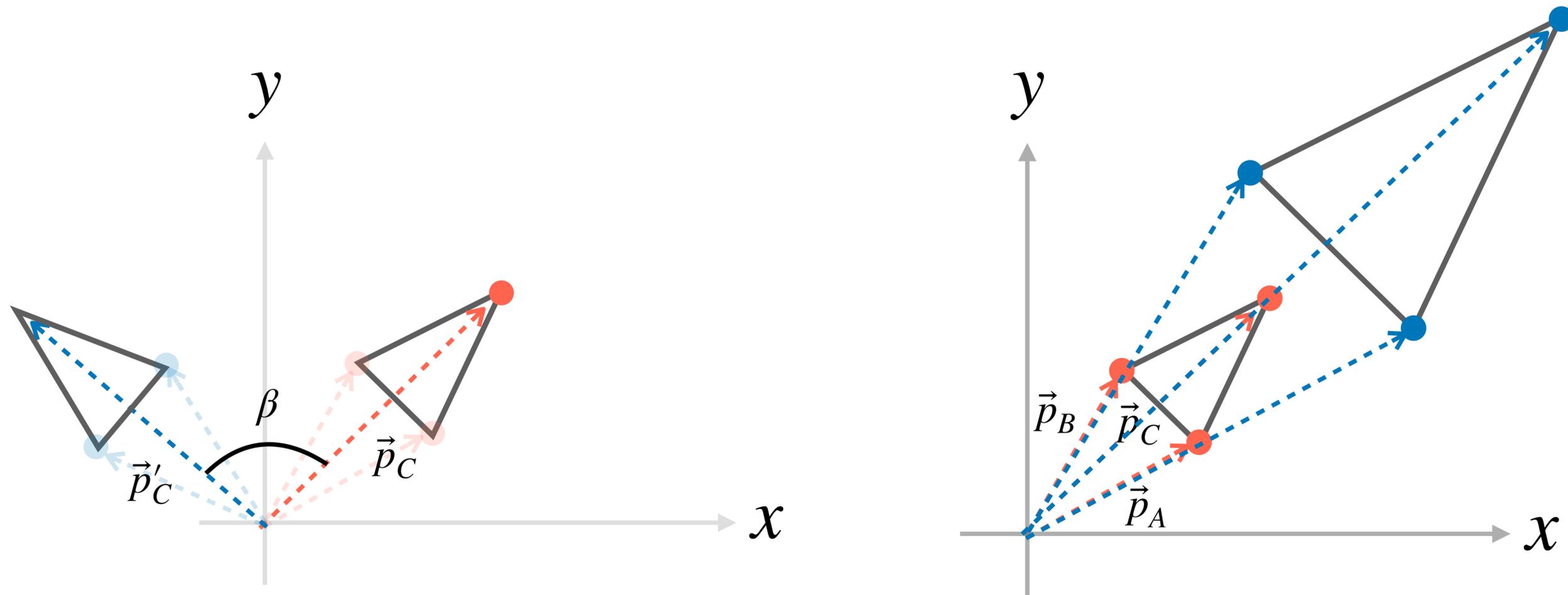
$$\vec{p}' = S \cdot \vec{p}$$

$$\vec{p}' = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Rotação e escala alteram posição

Se os vértices não estiverem definidos no sistema de coordenadas do objeto (origem no centro do objeto), a rotação e a escala também alteram a posição.



Coordenadas Homogêneas

- ▶ Em computação gráfica, é mais eficiente (evita tráfego de dados CPU x GPU) combinar as transformações geométricas em uma única matriz de transformações.
- ▶ Para isso, adicionamos uma coordenada $w = 1$ aos vértices do objeto:

$$(2D) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Matrizes de transformação } 3 \times 3$$

$$(3D) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Matrizes de transformação } 4 \times 4$$

Matrizes de Transformação 2D

(Translação)
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Rotação)
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Escala)
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para relizar composições de transformações, basta multiplicar as matrizes de transformação.

Rotação ao redor de um ponto Q :

1. Translação de Q para a origem (T_Q)
2. Rotação ao redor da origem (R_θ)
3. Translação de volta para Q ($-T$)

$$P' = (-T_Q)R_\theta T_Q P$$

Note que multiplicação de matrizes não é comutativa!

Próximas aulas

A4: Física - Objetos Rígidos

Mecânica linear para movimentação de objetos rígidos.

L4: Asteroids - Parte 1

Implementar um componente RigidBody para a movimentação de objetos rígidos.